ST. PÖLTEN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

Graphentheorie

kein Prüfungsstoff

Dipl.-Ing. Hubert Schölnast, BSc
Stand: 29. Juni 2022

Fachhochschule St. Pölten GmbH, Campus-Platz 1, 3100 St. Pölten, T: +43 (2742) 313 228, F: +43 (2742) 313 228-339, E: csc@fhstp.ac.at, I: www.fhstp.ac.at

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen

Der Inhalt dieses Skriptums ist kein Teil der Statistik-Lehrveranstaltung und daher wird nichts, was in diesem Dokument steht, explizit bei einer Prüfung abgefragt werden. Jedoch kann es helfen, dieses Dokument einmal durchzulesen, um Bäume im Sinn der Graphentheorie besser zu verstehen, weil das Kapitel über Wahrscheinlichkeitsbäume im Statistik-Skriptum teilweise darauf aufbaut und leichter zu verstehen ist, wenn man zumindest eine grundlegende Ahnung von Bäumen hat. Davon abgesehen haben Bäume (und ganz allgemein alle Graphen) sehr viele andere Anwendungen, darunter auch viele in anderen Teilgebieten von Data-Science.

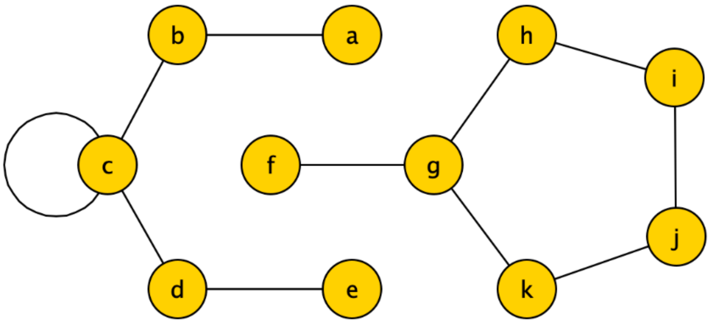

Abb. 1: Ein Graph (im Sinne der Graphentheorie)

Die mit Buchstaben beschrifteten Kreise nennt man Knoten, die Verbindungslinien, die je zwei Knoten miteinander verbinden, heißen Kanten. Der Knoten c ist mit sich selbst verbunden. Solche Kanten, die einen Knoten mit sich selbst verbinden, heißen Schleifen. Wenn man den Kanten folgt, kann man vom Knoten a zum Knoten d gelangen. Das Knotenpaar (a, d) nennt man daher verbunden. Das Paar (c, h) ist ein Beispiel für ein unverbundenes Paar. Die Kantenfolge, der man folgen muss um von a nach d zu gelangen nennt man einen Weg. In der rechten Bildhälfte ist zu sehen, dass der Weg $h - i - j - k - g - h$ beim selben Knoten endet bei dem er begonnen hat. Solche Wege heißen *geschlossene Wege* oder *Kreise*. Dieser Graph ist ungerichtet, nichtzusammenhängend, weder kanten- noch knotengefärbt, und weder kanten- noch knotengewichtet. Vor allem ist dieser Graph kein Baum. All diese Begriffe werden weiter unten in diesem Dokument erklärt.

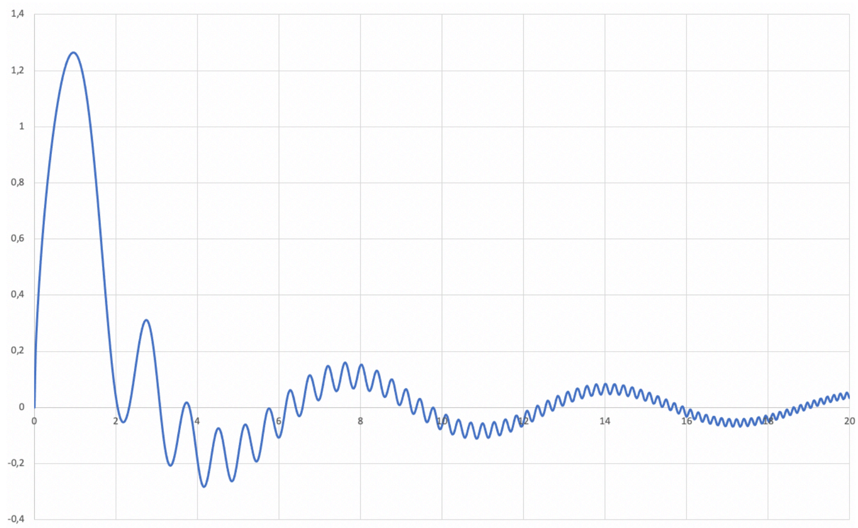

Abb. 2: Ebenfalls ein Graph, aber nicht im Sinn der Graphentheorie.

Was hier abgebildet ist, ist der Graph (also die Darstellung) einer Funktion. Solche Funktionsgraphen teilen sich mit den Graphen aus der Graphentheorie nur denselben Namen, haben aber außer dem Namen genau gar nichts mit der Graphentheorie zu tun.

2 Kurze Einführung in die Graphentheorie

Ein Graph ist eigentlich nichts weiter als eine Menge von Dingen, die man in der Fachsprache der Graphentheorie »Knoten« nennt, zu der eine andere Menge gehört, deren Elemente man »Kanten« nennt. Dabei verbindet jede Kante genau zwei Knoten, wobei im allgemeinen Fall auch erlaubt ist, dass die beiden verbundenen Knoten identisch sind. Dann verbindet eine Kante einen Knoten mit sich selbst. Sowohl Knoten als auch Kanten können mit Gewichten und Farben versehen sein, und die Kanten können auch eine Richtung haben.

2.1 Knoten

In der reinen Graphentheorie ist ein Knoten nichts weiter als ein Element aus der Menge der Knoten, ohne irgendeine tiefere Bedeutung. Aber in allen praktischen Anwendungen der Graphentheorie ist jeder einzelne Knoten ein Stellvertreter für ein ganz konkretes Ding aus der Welt, über die man etwas mit dem Graphen sichtbar machen will. Beispielsweise kann man Verwandtschaftsbeziehungen innerhalb einer Familie mit Hilfe von Graphen darstellen, dann repräsentiert jeder Knoten im Graph eine Person. Wenn man dokumentieren möchte, welche Flugverbindungen zwischen den Flughäfen eines Landes oder Kontinents existieren, kann man dazu ebenfalls einen Graphen verwenden, dessen Knoten dann die Flughäfen darstellen.

Wenn man Graphen zeichnet, werden Knoten oft als Kreise dargestellt (wie z.B. in Abb. 1). Den Namen des Knotens (Name der Person, Name des Flughafens, usw.), oder eine Abkürzung des Namens schreibt man in den Kreis. Manchmal werden auch aufwändigere Symbole anstelle einfacher Kreise verwendet (z.B. Portraits von Personen). Die genaue Form ist jedoch meist irrelevant. (Mögliche Ausnahmen werden bei den gefärbten Knoten behandelt.)

Beachte, dass die Bezeichnung *Kreis* in der Graphentheorie eine ganz bestimmte Bedeutung hat, dass damit aber nicht die Darstellungsform von Knoten gemeint ist. (Siehe 2.3.1)

- Alternativer Name (wird aber selten verwendet): Punkt.
- Englische Bezeichnung: Vertex (plural: vertices), manchmal aber auch: *node*. Den Namen *point* gibt es auch, er wird aber ebenso selten verwendet wie *Punkt* im Deutschen.

2.1.1 Gefärbte und ungefärbte Knoten

Manchmal möchte man darstellen, dass die Knoten eines Graphen zu unterschiedlichen Klassen gehören. Beispielsweise möchte man in einem Graphen, der Verwandtschafts-beziehungen darstellt, Männer und Frauen gleich auf einen Blick klar voneinander unterscheiden können. In der Darstellung eines Graphen kann man dieses Problem lösen, indem man jeder Klasse eine eigene Farbe (z.B. rot, blau, usw.) zuordnet, und die Knoten, die derselben Klasse angehören, in der jeweiligen Klassenfarbe einfärbt. Die auf diese Weise mit einer Klassenzugehörigkeit ausgestatteten Knoten nennt man daher *gefärbte Knoten*. Wenn die Knoten keinen Klassen zugeordnet sind, handelt es sich um ungefärbte Knoten.

Die Farben, denen ein gefärbter Knoten zugeordnet sein kann, bilden eine nominalskalierte diskrete Menge ohne innere Ordnung. (Es ist nicht sinnvoll, davon zu sprechen, dass eine Farbe größer als eine andere ist.)

Beachte, dass entweder alle Knoten eines Graphen gefärbt sind oder alle ungefärbt. Graphen, deren Knoten gefärbt sind, nennt man **knotengefärbte Graphen**.

Beachte auch, dass es nicht notwendig ist, die Knoten in der Darstellung auf dem Papier oder auf dem Bildschirm tatsächlichen mit einer realen Farbe einzufärben. Man kann die Zugehörigkeit der Knoten zu bestimmten Klassen auch durch unterschiedliche Formen (Dreiecke, Quadrate usw.) darstellen, oder durch nominalskalierte Symbole (Zahlen, Buchstaben und beliebige andere Zeichen, wobei die innere Ordnung dieser Zeichen keine Rolle spielt), die man in oder neben den Knoten schreibt. Und obwohl dann gar keine Farbe in eigentlichen Sinn mehr im Spiel ist, nennt man diese Knoten trotzdem *gefärbt.*

Mit dem Wort *gefärbt* ist also nicht die farbige Darstellung gemeint, sondern die Tatsache, dass die Knoten verschiedenen Klassen zugeordnet sind.

- Englische Bezeichnung: colored vertex

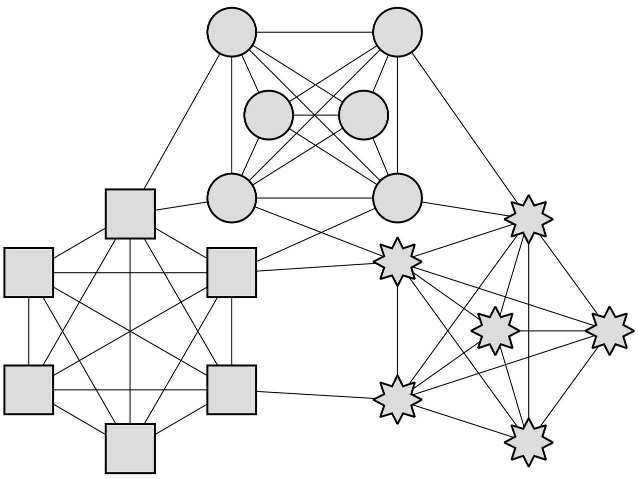

Abb. 3: Ein Graph mit gefärbten Knoten (ein knotengefärbter Graph)

Die Zugehörigkeit der Knoten ist hier nicht durch Einfärbung mit unterschiedlichen Farben dargestellt, sondern durch unterschiedliche Symbole für die Knoten (Kreis, Quadrat und Stern). Trotzdem handelt es sich um gefärbte Knoten bzw. um einen knotengefärbten Graphen.

2.1.2 Gewichtete und ungewichtete Knoten

Ein Organigramm ist die Darstellung der Hierarchie in einem Unternehmen oder in einer Organisation in Form eines Baumes. (Ein Baum ist ein spezieller Graphentypus, siehe Abschnitt 3) Dabei steht jeder Knoten für eine Person oder für eine Gruppe, Abteilung usw.

Wenn man in so einem Graphen angibt, für welchen Jahresumsatz die jeweilige Person oder hierarchische Einheit verantwortlich ist, fügt man jedem Knoten eine Zahl hinzu die diesem Umsatz entspricht. Im allgemeinen Fall ist diese Zahl eine reelle Zahl. In der Sprache der Graphentheorie bezeichnet man diese Zahl als das *Gewicht* des Knotens, und einen Knoten, der ein solches Gewicht hat, nennt man einen gewichteten Knoten. (Und natürlich: Knoten ohne Gewicht = ungewichteter Knoten.)

Die Gewichte, denen ein gewichteter Knoten zugeordnet sein kann, sind üblicherweise reelle Zahlen oder Elemente aus Teilmengen der reellen Zahlen (z.B. natürliche Zahlen).

Beachte, dass entweder alle Knoten eines Graphen gewichtet sind oder alle ungewichtet. Graphen, deren Knoten gewichtet sind, nennt man **knotengewichtete Graphen.**

- Englische Bezeichnung: weighted vertex

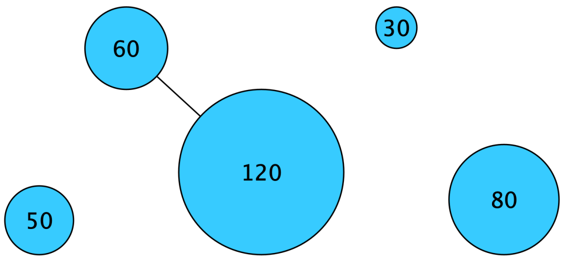

Abb. 4: Ein knotengewichteter Graph

Die Gewichte der einzelnen Knoten entsprechen ihren Beschriftungen, zusätzlich wurden die Größen der Knoten proportional zu ihrem Gewicht gewählt. Beide Arten der Darstellung (Beschriftung, Wahl der Größe) werden in der Praxis verwendet.
Die Tatsache, dass hier mehrere Knoten nicht mit den anderen Knoten des Graphen verbunden sind, tut hier nichts zur Sache. Mehr darüber steht im Kapitel über zusammenhängende und nichtzusammenhängende Graphen (2.4.2).

2.2 Kanten

Eine Kante ist die Verbindung zwischen zwei Knoten. Wenn man einen Graphen zeichnet, ist das eine Linie, die bei einem Knoten beginnt und bei einem anderen Knoten endet. Zu einer Kante gehören also immer genau zwei Knoten. Die Form der Linie (gerade, gebogen, verschlungen) ist egal. Es zählt nur, welche beiden Knoten sie miteinander verbindet. Es kann durchaus vorkommen, dass es in einem Graphen Knoten gibt, die mit gar keinen anderen Knoten verbunden sind. Die Knoten mit den Gewichten 30, 50 und 80 in Abb. 4 sind Beispiele für solche unverbundenen Knoten. Trotzdem sind diese Knoten Bestandteile des Graphen.

Wenn dasselbe Knotenpaar durch 2 oder mehr Kanten verbunden ist, spricht man von Mehrfachkanten. Graphen mit Mehrfachkanten heißen ***Multigraphen****. Wenn die Kanten gerichtet sind (siehe unten, 2.2.2) gelten nur Kanten als Mehrfachkanten, die in derselben Richtung verlaufen. Wenn eine einzelne Kante, entgegen der hier gegebenen Definition, 3 oder mehr Knoten verbindet, handelt es sich um einen* ***Hypergraphen****. In diesem Skriptum werden weder Multigraphen noch Hypergraphen behandelt.*

- Alternativer Namen: Verbindung, Linie, Verbindungslinie.
- Englische Bezeichnung: Edge (plural: edges), manchmal aber auch: *link* oder *line*.

2.2.1 Schleifen

Eine Kante verbindet zwar immer zwei Knoten miteinander, diese beiden Knoten müssen aber nicht notwendigerweise verschieden voneinander sein. (Beispiel: Knoten c in Abb. 1Abb. 4.) Beispielsweise kann man in einem Graphen darstellen, von welchen Seiten einer Internet-domäne Links zu anderen Seiten derselben Domäne führen. Bei Seiten, die einen Link zu sich selbst enthalten, wird man eine Schleife im Graph zeichnen müssen. Seiten, die keinen Link zu sich selbst enthalten, werden dann ohne eine Schleife dargestellt.

Beachte, dass es in der Graphentheorie auch Kreise (englisch: circuits) gibt, dass aber zwischen Schleifen und Kreisen ein Unterschied besteht. Details stehen im Kapitel über Kreise. Hier sei aber schon mal verraten, dass jede Schleife ein Kreis der Länge 1 ist.

- Alternativer Namen (selten verwendet): Schlinge, Schlaufe.
- Englische Bezeichnung: Loop (Was zuvor über Schleifen und Kreise gesagt wurde gilt im Englischen auch für loops and circuits)

2.2.2 Gerichtete und ungerichtete Kanten

Die Bezeichnung *gerichtet* hat nichts mit *hingerichtet* oder etwas ähnlichem zu tun, sondern kommt vom Wort *Richtung*. Im Straßenplan einer Stadt werden Kreuzungen (das sind die Knoten) durch Straßen (das sind die Kanten) miteinander verbunden. (Die Enden von Sackgassen sind ebenfalls Knoten.) Wenn eine Straße in beide Richtungen befahren werden kann, spricht man von einer ungerichteten Kante. Einbahnstraßen sind gerichtete Kanten. Die Internet-Links des letzten Beispiels wird man daher mit lauter gerichteten Kanten darstellen. Wenn ein Link von Seite A zu Seite B führt, und umgekehrt sich auch auf der Seite B ein Link zur Seite A befindet, dann muss man zwischen den beiden Knoten A und B zwei gerichtete Kanten mit entgegengesetzten Richtungen zeichnen (siehe in Abb. 5). Ein Graph, in dem die Kanten gerichtet sind, heißt **gerichteter Graph**.

2.2.3 Ein- und ausgehende Kanten eines Knotens

Die ausgehenden Kanten eines Knotens sind die gerichteten Kanten, die an dem Knoten beginnen (die von ihm ausgehen). Die eingehenden Kanten eines Knotens sind die gerichteten Kanten, die an dem Knoten enden (die bei ihm eingehen).

Eine ungerichtete Kante wird einfach nur als Linie ohne weitere Merkmale gezeichnet (wie z.B. in Abb. 1, Abb. 3 und Abb. 4). Eine gerichtete Kante wird normalerweise mit einem Pfeilsymbol an ihrem End-Knoten gezeichnet. Daher erkennt man die ausgehenden Kanten eines Knotens daran, dass sie kein Pfeil-Symbol tragen, während man die eingehenden Kanten eines Knotens genau an diesem Symbol erkennt. (Siehe Abb. 5, linke Bildhälfte.)

In besonderen Fällen (z.B. in der Standard-Darstellung von gewurzelten Bäumen) verzichtet man aber auf dieses Pfeil-Symbol, weil dann auf eine andere Weise (nämlich durch die Lage der Knoten zueinander) dargestellt wird, welche Richtung die Kante hat (siehe dort).

Wenn es zwischen zwei Knoten zwei Kanten mit entgegengesetzten Richtungen gibt, wird stattdessen manchmal nur eine Kante gezeichnet, die an beiden Enden ein Pfeil-Symbol hat. Aber Vorsicht: Ausgehende Kanten kann man dann nicht mehr am Fehlen des Pfeilsymbols erkennen, sondern nur daran, dass es beim Knoten am anderen Ende der Kante dieses Symbol gibt. Bei umfangreicheren Graphen mit langen Kanten hat man aber nicht immer beide Enden einer Kante im Blick und kann dann die ausgehenden Kanten eines Knotens übersehen.

Es ist nicht üblich, in einem Graphen gerichtete und ungerichtete Kanten zu mischen. Normalerweise sind entweder alle Kanten gerichtet oder alle sind ungerichtet. Wenn man trotzdem mischt, kann man die ungerichteten Kanten als zwei gerichtete Kanten mit entgegengesetzten Richtungen interpretieren.

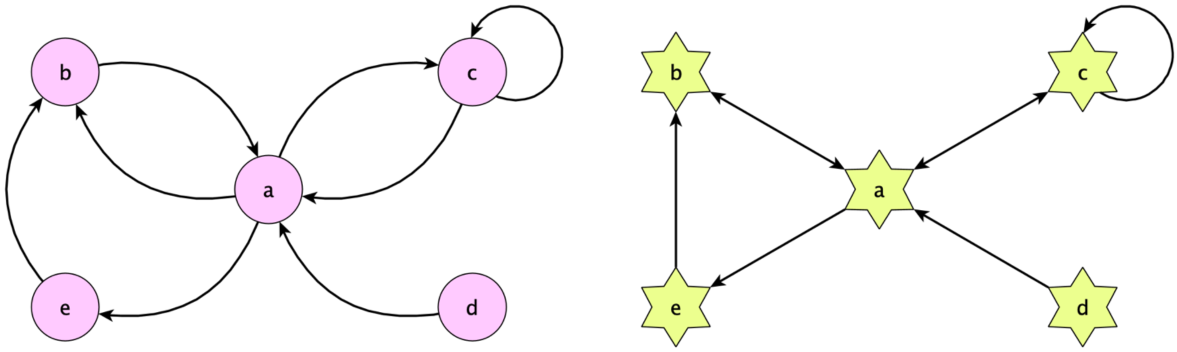

Abb. 5: Zwei verschiedene Darstellungen desselben gerichteten Graphen
In einem gerichteten Graphen sind immer alle Kanten gerichtet. Wenn es zwischen zwei Knoten sowohl den Hin- als auch den Rückweg gibt (z.B. Paar (a, b) oder Paar (a, c)), müssen entweder beide Richtungen als separate Pfeile eingezeichnet werden (linke Darstellung), oder beide Enden der betroffenen Kanten müssen ein Pfeilsymbol haben (rechte Darstellung). In der linken Darstellung ist leicht zu erkennen, dass der Knoten b nicht nur zwei eingehende Kanten, sondern auch eine ausgehende Kante hat. In der rechten Darstellung sind alle oder einige der ausgehenden Kanten der Knoten a, b und c leicht zu übersehen.

- Alternativer Namen (selten verwendet): orientierte Kante bzw. nicht-orientierte Kante.
- Englische Bezeichnung: directed (undirected) edge, oriented (unoriented) edge; incoming and outgoing edges.

2.2.4 **Gewichtete und ungewichtete Kanten**

In einer Straßenkarte möchte man manchmal bei den Kanten auch eine Weglänge oder die Fahrzeit angeben, und solche Werte haben in der Graphentheorie in bestimmten Anwendungen auch eine wichtige Bedeutung, z.B. bei der Suche nach der kürzesten oder der schnellsten Verbindung zwischen zwei Knoten im Graphen. Solche Werte nennt man in der Graphentheorie die Gewichte der Kanten. Wenn es bei einer Kante ein solches Gewicht gibt, handelt es sich um eine gewichtete Kante, sonst um eine ungewichtete.

Es ist nicht möglich, in einem Graphen gewichtete und ungewichtete Kanten zu mischen. Wenn man Gewichte verwendet, muss man ausnahmslos alle Kanten im Graphen mit Gewichten versehen.

Man kann auch gerichtete Kanten mit Gewichten versehen, dann hat man gerichtete und gewichtete Kanten. Beachte, dass in diesem Fall bei Kantenpaaren, wovon eine Kante von A nach B und die andere in die entgegengesetzte Richtung verlaufen, die beiden Gewichte nicht notwendigerweise gleich sein müssen. Manchmal ist das der Fall (z.B. Länge der Straße in Metern), manchmal nicht (z.B. Fahrzeit mit dem Fahrrad auf einer Straße mit starkem Gefälle).

Ein Graph, dessen Kanten mit Gewichten versehen sind, heißt **kantengewichteter Graph**.

- Englische Bezeichnung: weighted (unweighted) edge

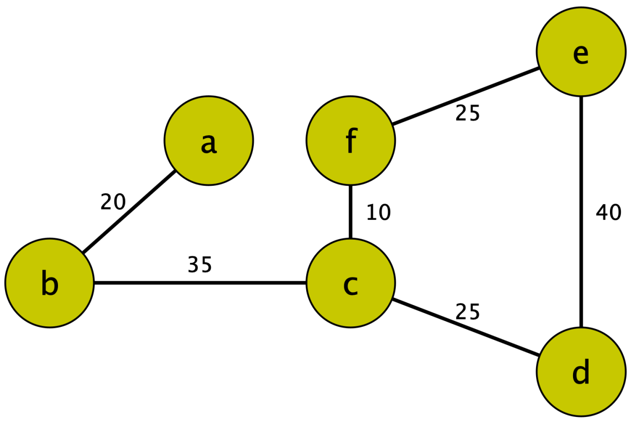

Abb. 6: Ein Graph mit gewichteten Kanten (kantengewichteter Graph)

Den Kanten sind Gewichte zugeordnet, die in der Darstellung als Zahlen neben die Kanten geschrieben werden. In der hier gewählten Darstellung wurde versucht, die Längen der Kanten ungefähr entsprechend ihrer Gewichte zu zeichnen. Das wird zwar häufig so gemacht, ist aber für gewöhnlich nicht notwendig und würde manchmal auch zu seltsamen Bildern führen, wie in Abb. 7 zu sehen ist.

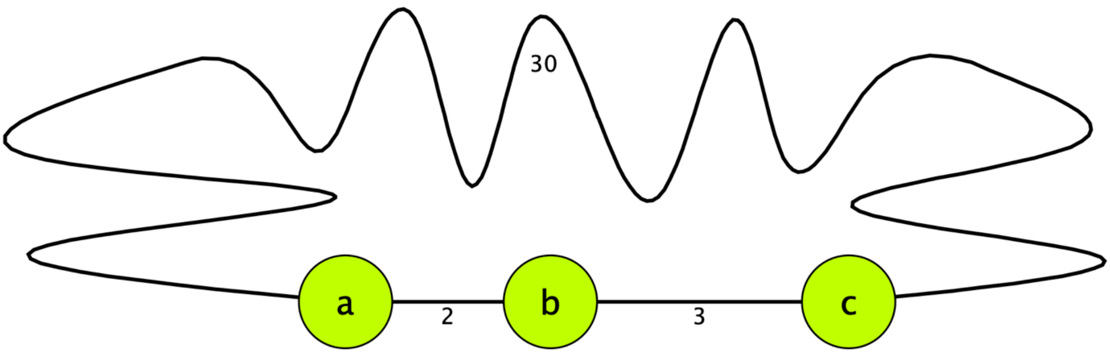

Abb. 7: Ein anderer kantengewichteter Graph

Die Gewichte 2, 3 und 30 der drei Kanten verletzten die Dreiecksungleichung. Daher ist es nicht möglich, diesen Graph so zu zeichnen, dass jede Kante eine gerade Strecke ist, deren Länge dem Gewicht entspricht. Daher müssen entweder, so wie hier gezeigt, einige Kanten als gekrümmte Linien gezeichnet werden, oder man verzichtet darauf, die Gewichte als Längen darzustellen.

2.2.5 Gefärbte und ungefärbte Kanten

Gelegentlich möchte man die Kanten bestimmten Klassen zuordnen. Beispielsweise könnte man in einer Straßenkarte die Straßen, die von Fahrzeugen befahrt werden können, von den Fußwegen unterscheiden können. Dann kann man die Kanten durch entsprechende Einfärbung den Straßenklassen zuordnen. Wie schon bei den gefärbten Knoten sind auch bei den gefärbten Kanten die Farben nur eine von mehreren Möglichkeiten, die unterschiedlichen Kanten-Klassen darzustellen. Andere, ebenfalls sehr häufig verwendete Möglichkeiten sind punktierte und strichlierte Linien aber auch unterschiedliche Strichdicken (siehe Abb. 8.). Graphen mit gefärbten Kanten sind **kantengefärbte Graphen.**

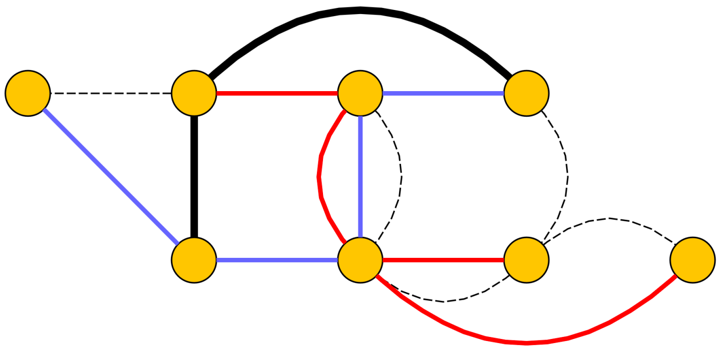

Abb. 8: Ein Graph mit gefärbten Kanten (kantengefärbter Graph)
Die Zugehörigkeit zu unterschiedlichen Klassen wird in diesem Beispiel nicht nur durch die Farbe, sondern auch durch die Strichdicke und strichlierte bzw. nicht strichlierte Linien dargestellt.

- Englische Bezeichnung: colored (uncolored) edge.

2.3 Wege

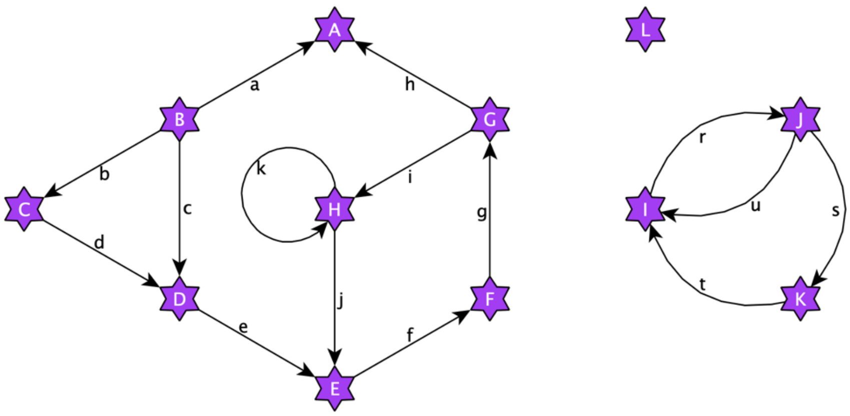

Abb. 9: Ein gerichteter Graph

Ein Weg ist eine Folge von Kanten, die einen Knoten mit einem anderen Knoten verbinden. Beispielsweise kann man in dem Graphen in Abb. 9 vom Knoten B zum Knoten H gelangen, indem man dem Weg folgt, der (in genau dieser Reihenfolge) aus diesen Kanten besteht: c, e, f, g, i. Aber auch das sind gültige Wege, die von B zu H führen:

- b, d, e, f, g, i
- c, e, f, g, i, k
- b, d, e, f, g, i, k, k
- $c, e, f, g, i, j, f, g, i$
- $b, d, e, f, g, i, k, k, k, j, f, g, i, k, k, k, k, k, k, k, j, f, g, i$

Streng genommen muss zwischen Wegen und Kantenzügen unterscheiden werden: Ein Weg ist eine **Folge von Knoten**, wobei zwei aufeinanderfolgende Knoten durch eine gemeinsame Kante verbunden sind. Ein Kantenzug ist hingegen eine **Folge von Kanten**, wobei der Endknoten jeder Kante gleichzeitig der Angangsknoten der nächsten Kante im Graphen ist. Solange man es aber nicht mit Multigraphen oder Hypergraphen zu tun hat, kann man immer von einem Weg (im strengen Sinn) auf genau einen Kantenzug schließen, und auch der Umkehrschluss ist immer eindeutig. Daher werden unter den gegebenen Voraussetzungen Wege und Kantenzüge als zwei Ausprägungen derselben Sache verstanden. In diesem Skriptum ist mit einem Weg daher ne nach Kontext einmal eine Folge vom Knoten, ein anderes Mal eine Folge von Kanten und ein drittes Mal eine alternierende Folge von Knoten und Kanten gemeint.

- Alternative Bezeichnung: Pfad
- Englische Bezeichnung: circuit

2.3.1 Geschlossener Weg

Ein geschlossener Kreis ist ein Weg, der von einem Knoten genau zum selben Knoten zurückführt. In Abb. 9 sind die folgenden Wege geschlossene Wege:

- k
- f, g, i, j
- r, u
- r, s, t

Selbstverständlich kann der Anfangsknoten innerhalb eines geschlossenen Weges frei gewählt werden, daher sind auch s, t, r und t, r, s geschlossene Wege. Weil man auch beim mehrfachen Durchlaufen eines Weges wieder am Anfang ankommt, sind auch k, k, k oder r, u, r, u, r, u, r, u oder i, j, f, g, i, j, f, g geschlossene Wege, aber auch k, k, j, f, g, i, k.

- Alternative Bezeichnung: Kreis.
- Englische Bezeichnung: closed circuit.

2.3.2 Besondere geschlossene Wege

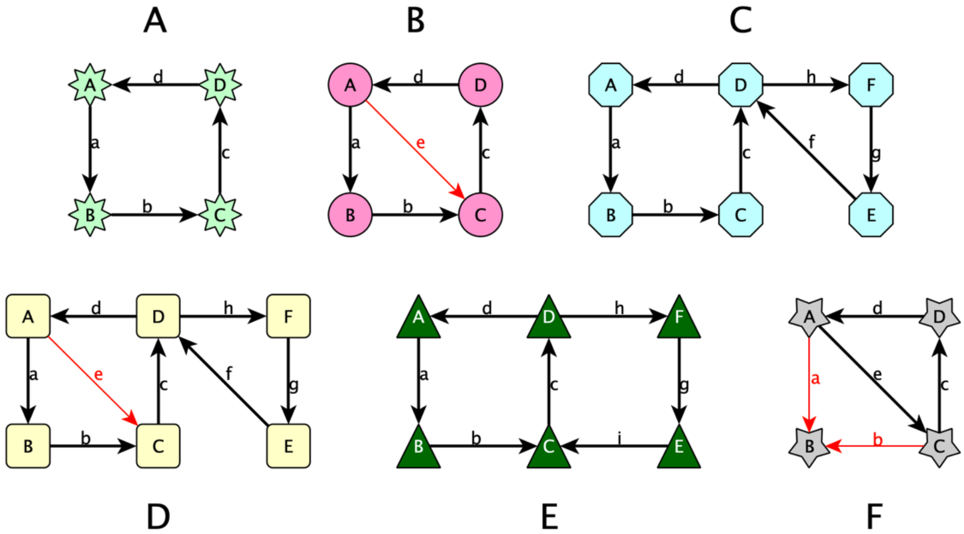

Abb. 10: Sechs verschiedene Graphen, die geschlossene Wege enthalten

Graph A enthält einen Hamiltonkreis der zugleich auch ein Eulerkreis ist. Graph B enthält einen Hamlitonkreis aber keinen Eulerkreis. Graph C enthält einen Eulerkreis aber keinen Hamiltonkreis. Die Graphen D, E und F enthalten weder einen Hamilton- noch einen Eulerkreis.

Hamiltonkreis

Ein Hamiltonkreis ist ein geschlossener Weg, auf dem jeder Knoten des Graphen liegt, und wo beim Durchwandern des Kreises jeder Knoten **genau einmal** besucht wird. In Abb. 10 ist das nur bei den Graphen A und B der Fall. In den Graphen C, D und E muss man, wenn man jeden Knoten mindestens einmal besuchen will, zweimal über den Knoten D gehen. (Im Graphen E zusätzlich auch zweimal über C.) Im Graphen F gibt es keinen geschlossenen Weg, der den Knoten B enthält.

Eulerkreis

Ein Eulerkreis ist ein geschlossener Weg, der mindestens einmal durch jeden Knoten und **genau einmal** durch jede Kante des Graphen verläuft. Das ist in Abb. 10 nur bei den Graphen A und C der Fall. Die Graphen B und D enthalten jeweils eine Kante (die Kante e), die nicht durchlaufen werden kann, wenn man einem geschlossenen Weg durch alle Knoten folgen will. Im Graphen F gibt es keinen geschlossenen Weg, der den Knoten B enthält.

2.4 Graphen

Nachdem geklärt ist, was Knoten und Kanten sind, kann man nun endlich auch klar definieren was ein Graph ist: Ein Graph ist ein mathematisches Konstrukt, das aus Knoten besteht, wobei die Knoten miteinander durch Kanten verbunden sind.

Dargestellt werden Graphen meist durch Schaubilder wie in den bereits gezeigten Beispielen. Dabei ist wichtig zu wissen, dass weder die Lage der Knoten zueinander noch der genaue Verlauf der Kanten entscheidend sind (siehe Abb. 11).

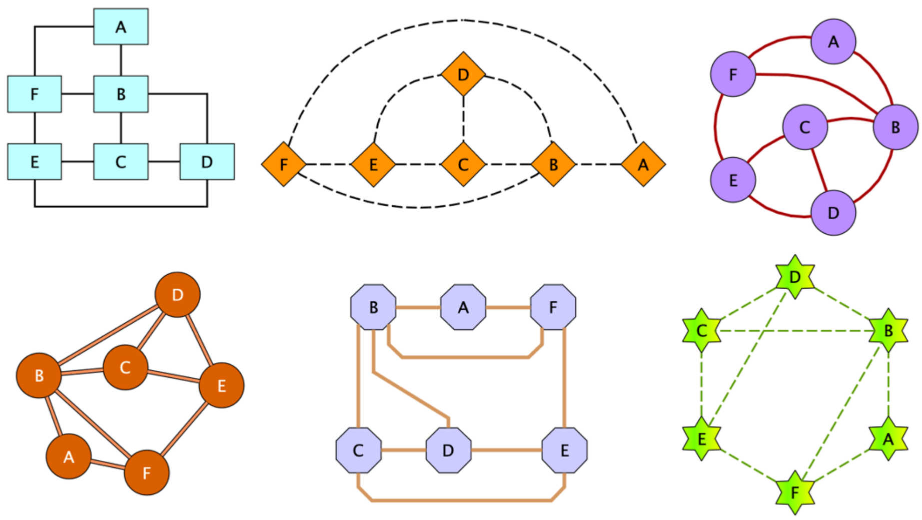

Abb. 11: Sechs gleichwertige Darstellungen desselben Graphen

2.4.1 **Matrixdarstellung**

Genau dieselbe Information, die in einer graphischen Darstellung eines Graphen steckt, kann auch in einer quadratischen Matrix dargestellt werden. Dazu trägt man am linken und oberen Rand der Matrix die Namen der Knoten auf, und in den Feldern der Matrix trägt man ein, ob es eine Kante zwischen dem Zeilen- und dem Spaltenknoten gibt.

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	0	0	1
B	1	0	1	1	0	1
C	0	1	0	1	1	0
D	0	1	1	0	1	0
E	0	0	1	1	0	1
F	1	1	0	0	1	0

Abb. 12: Matrixdarstellung desselben Graphen, der bereits in Abb. 11 mehrfach dargestellt wurde.

Dieser Graph ist ungerichtet (keine Pfeile, sondern nur lauter ungerichtete Kanten). In der Matrix drückt sich das dadurch aus, dass sie symmetrisch ist. (Eine quadratische Matrix ist symmetrisch, wenn sie unverändert bleibt, wenn man die Spalten gegen die Zeilen austauscht, was dasselbe wie eine Spiegelung an der Diagonalen ist.)

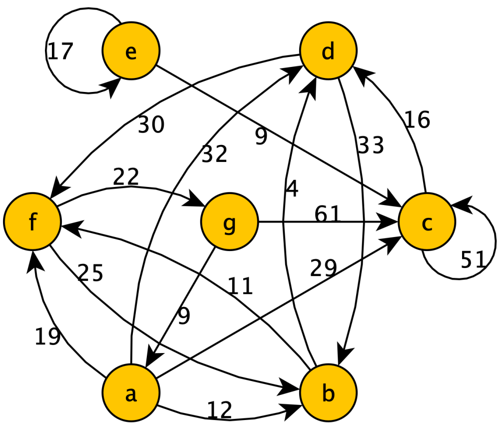

Abb. 13: Ein kantengewichteter gerichteter Graph

	a	b	c	d	e	f	g
a		12	29	32		19	
b				4		11	
c			51	16			
d		33				30	
e			9		17		
f		25					22
g	9		61				

Abb. 14: Matrixdarstellung desselben Graphen

Diese Matrix ist nicht symmetrisch. Wenn eine Kante vom Knoten x ausgeht (beginnt) und beim Knoten y eingeht (endet), wird das Gewicht der Kante in die Zelle in der Zeile x und der Spalte y geschrieben. Daher stehen die Namen der Knoten am linken Rand (hier: grüner Hintergrund) in ihrer Rolle als ausgehende Knoten, während sie als Spaltenüberschriften (hier: roter Hintergrund) in ihrer Rolle als eingehende Knoten fungieren. Schleifen stehen in der Diagonale der Matrix.

2.4.2 Zusammenhängender und nichtzusammenhängender Graph

Zusammenhang bei ungerichteten Graphen

Ein ungerichteter Graph ist zusammenhängend, wenn es von jedem Knoten des Graphen einen Weg zu jedem anderen Knoten gibt. Wenn es in einem ungerichteten Graphen ein Paar von Knoten gibt, die nicht über einen Weg miteinander verbunden sind, ist dieser Graph nicht zusammenhängend. Die ungerichteten Graphen in Abb. 1 und Abb. 4 sind nichtzusammenhängend, die ungerichteten Graphen in Abb. 3, Abb. 6, Abb. 7, Abb. 8, Abb. 11 und Abb. 12 sind zusammenhängend.

Zusammenhang bei gerichteten Graphen

Bei einem gerichteten Graphen ist der Zusammenhang schwieriger. Wenn es von einem bestimmten Angangsknoten α Wege zu allen anderen Knoten gibt, ist der gerichtete Graph »zusammenhängend vom Knoten α aus«. Wenn alle Knoten eines gerichteten Weges die Eigenschaft haben, das von ihnen aus der Graph zusammenhängend ist, heißt der gerichtete Graph »stark zusammenhängend«. Wenn man in einem gerichteten Graphen, der nicht stark zusammenhängend ist, alle Kanten als ungerichtete Kanten interpretiert, und der so entstandene ungerichtete Graph dann zusammenhängend ist, nennt man den ursprünglichen gerichteten Graphen »schwach zusammenhängend«. Wenn jedoch auch der entstandene ungerichtete Weg nicht zusammenhängend ist, nennt man auch den gerichteten Graphen »nicht zusammenhängend«. Der gerichtete Graph in Abb. 9 ist nichtzusammenhängend. Die gerichteten Graphen in Abb. 5 und Abb. 13 sind schwach zusammenhängend und zusammenhängend von einem Knoten aus. (In Abb. 5 ist der Graph von Knoten d aus zusammenhängend, in Abb. 13 von Knoten e aus). Die Graphen A bis E in Abb. 10 sind stark zusammenhängend, der Graph F aus derselben Abbildung ist von allen Knoten außer von Knoten B aus zusammenhängend.

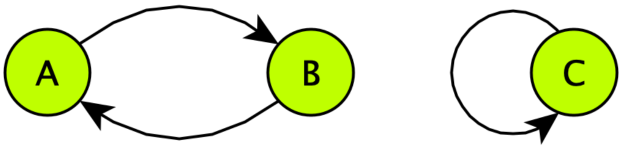

Abb. 15: Ein nichtzusammenhängender gerichteter Graph

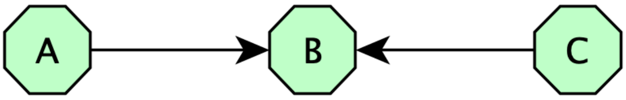

Abb. 16: Ein schwach zusammenhängender gerichteter Graph

Dieser Graph ist von keinem Knoten aus zusammenhängend. (Es gibt keinen Knoten, von dem aus alle anderen Knoten erreicht werden können.) Ersetzt man aber alle gerichteten Kanten durch ungerichtete, entsteht daraus ein zusammenhängender ungerichteter Weg. Daher ist der abgebildete Weg schwach zusammenhängend.

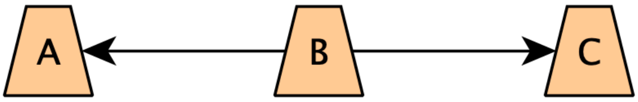

Abb. 17: Ein vom Knoten B aus zusammenhängender gerichteter Graph

Vom Knoten B aus können alle anderen Knoten des Graphen erreicht werden. Daher ist dieser Graph »zusammenhängend von Knoten B aus«. Er ist aber von keinem anderem Knoten aus zusammenhängend, daher ist er nicht stark zusammenhängend. Daraus, dass er von mindestens einem Knoten aus zusammenhängend ist, folgt bereits, dass er schwach zusammenhängend ist.

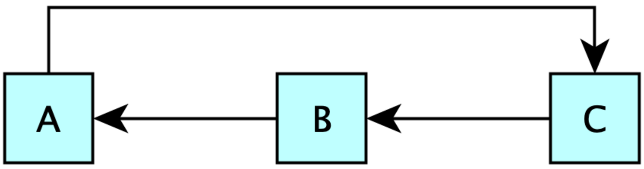

Abb. 18: Ein stark zusammenhängender gerichteter Graph

Der Graph ist von jedem seiner Knoten aus zusammenhängend, daher ist er stark zusammenhängend.

Ein gerichteter Graph, der von 2 oder mehr Knoten aus zusammenhängend ist, enthält immer mindestens einen geschlossenen Weg.

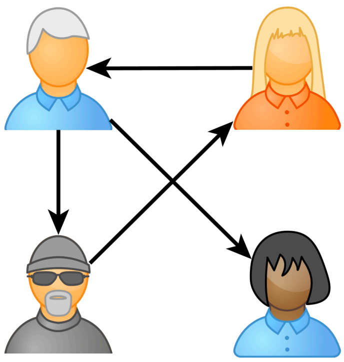

Abb. 19: Ein von mehreren Knoten aus zusammenhängender gerichteter Weg

Der Graph in Abb. 19 ist unter anderen von den Mann mit Bart und von der blonden Frau aus zusammenhängend. Das heißt, dass von beiden genannten Personen Wege ausgehen, mit denen jede beliebige andere Person des Graphen erreichbar ist. Das bedeutet aber auch, dass es einen Weg geben muss, der vom Mann mit Bart zu blonden Frau führt. Nennen wir diesen Weg den *»Weg 1«*. Wenn es diesen Weg nicht gäbe, wäre der Graph nicht vom bärtigen Mann aus zusammenhängend. Und es muss mit der sinngemäß gleichen Begründung auch einen Weg geben, der von der blonden Frau zum Mann mit Bart führt, den wir »Weg 2« nennen. Folgt man dem Weg 1 und anschließend dem Weg 2, dann wandert man einem Weg entlang, der beim Mann mit Bart beginnt und bei ihm endet. Dieser zusammengesetzte Weg ist also ein geschlossener Weg, und es muss diesen geschlossenen Weg geben, weil der Graph von zwei verschiedenen Knoten aus zusammenhängend ist.

Daraus folgt sofort:

Wenn ein gerichteter Graph stark zusammenhängend ist, liegen alle Knoten auf einem geschlossenen Weg, der alle Knoten des Graphen durchläuft.

Dieser geschlossene Weg, der alle Knoten des Graphen durchläuft, muss aber weder ein Hamiltonkreis noch ein Eulerkreis sein. Der Graph A in Abb. 10 ist ein stark zusammenhängender gerichteter Graph, der sowohl einen Hamiltonkreis noch ein Eulerkreis enthält, aber die Graphen D und E aus derselben Abbildung sind zwar ebenfalls stark zusammenhängend, woraus folgt, dass es einen geschlossenen Weg gibt, der durch alle Knoten läuft, aber keiner der beiden Graphen enthält einen Hamiltonkreis und keiner von beiden enthält einen Eulerkreis.

Man erkennt an dem Beispiel in Abb. 19 auch sofort folgendes (beachte den weißhaarigen Mann):

Wenn auf einem geschlossenen Weg ein Knoten liegt, von dem aus der gerichtete Weg zusammenhängend ist, dann ist der Graph von allen Knoten auf diesem geschlossenen Weg ausgehend zusammenhängend.

3 Bäume

Ein Baum (im Sinn der Graphentheorie) ist ein Graph mit diesen Eigenschaften:

1. Gerichtet
2. Von einem Knoten aus zusammenhängend
3. Enthält keinen geschlossenen Weg

3.1 Darstellung und Anatomie eines Baumes

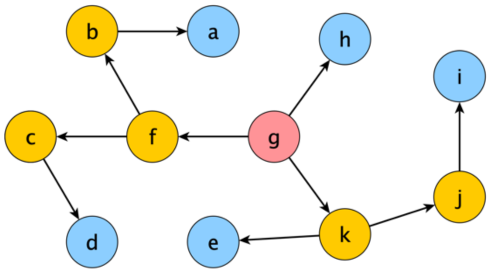

Abb. 20: Ein Baum

Dieser Graph ist gerichtet (alle Kanten haben eine Richtung), er ist zusammenhängend vom Knoten g aus und er enthält keine geschlossenen Wege. Daher ist dieser Graph ein Baum.

3.1.1 hierarchische Darstellung

Die genaue Lage der Knoten auf einem Blatt Papier ist irrelevant, ebenso die Länge und Krümmung der Kanten. Wichtig ist nur, welche Knoten existieren, und wie sie miteinander verbunden sind. Wenn zwei Graphen dieselben Knoten enthalten und zwischen jedem Paar von Knoten dieselben Kanten existieren oder nicht existieren, dann sind die Graphen gleich (siehe auch Abb. 11). Das kann man ausnutzen, um Bäume etwas übersichtlicher darzustellen. Dazu platziert man die Wurzel ganz oben und ordnet die restlichen Knoten so an, dass sich keine Kanten überkreuzen, und dass alle Kanten nach unten zeigen. Üblich ist auch, alle Knoten, die dieselbe Entfernung von der Wurzel haben, auf derselben Ebene anzuordnen.

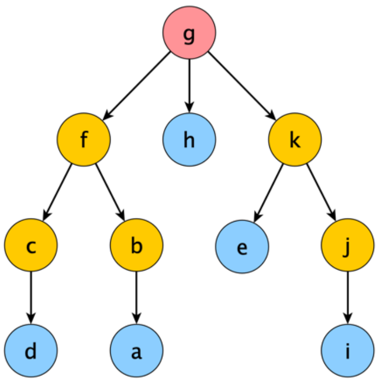

Abb. 21: Derselbe Baum wie zuvor, hier in hierarchischer Darstellung

3.1.2 Darstellung ohne Pfeile

Nachdem in der hierarchischen Darstellung alle Pfeile immer nach unten zeigen, kann man die Richtung der gerichteten Pfeile auch ausschließlich der Lage der miteinander verbundenen Knoten erkennen. Daher ist es bei Bäumen in hierarchischer Darstellung nicht zwingend notwendig, die Richtungen der Kanten durch Pfeilsymbole anzuzeigen. Es genügt, die Kanten ohne besondere Merkmale, also wie ungerichtete Kanten, zu zeichnen.

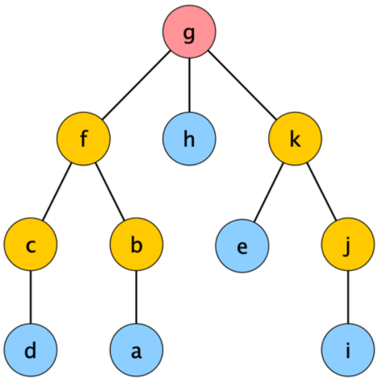

Abb. 22: Nochmals derselbe Baum, hier ohne explizite Richtungspfeile

3.1.3 Jeder Baum hat genau eine Wurzel

Die drei definierenden Eigenschaften eines Baumes (gerichtet, von einem Knoten aus zusammenhängend, ohne geschlossenen Weg) bewirken gemeinsam, dass der Graph von genau einem einzigen Knoten aus zusammenhängend ist. (Es ist nicht möglich, dass ein gerichteter Graph ohne geschlossene Wege von mehreren Knoten aus zusammenhängend ist.) Dieser eine Knoten, von dem aus alle anderen erreichbar sind, heißt **Wurzel** des Baumes. In dem Baum in Abb. 20, Abb. 21 und Abb. 22 ist dies der Knoten g.

3.1.4 Blätter

Die Knoten eines Baumes, von denen aus gar keine anderen Knoten erreichbar sind, heißen Blätter. In Abb. 20, Abb. 21 und Abb. 22 sind dies die Knoten a, d, e, h und i.

3.1.5 Teilbaum

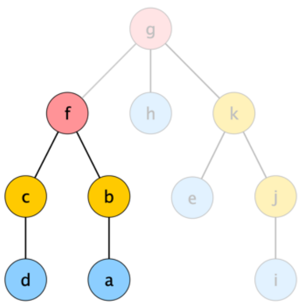

Abb. 23: Ein Teilbaum innerhalb eines Baumes

Bei einem Teilbaum erklärt man (vorübergehend) einen beliebigen Knoten zur neuen Wurzel und ignoriert alle Knoten und Kanten, die von diesem Knoten aus nicht erreichbar sind, wenn man die Richtung der Kanten respektiert. In Abb. 23 wurde der Knoten f zur neuen Wurzel erklärt, und dieser Knoten f bildet nun gemeinsam mit den Knoten $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ und d einen Teilbaum des ursprünglichen Baumes.

3.1.6 **Elternknoten, Kindknoten, Geschwisterknoten**

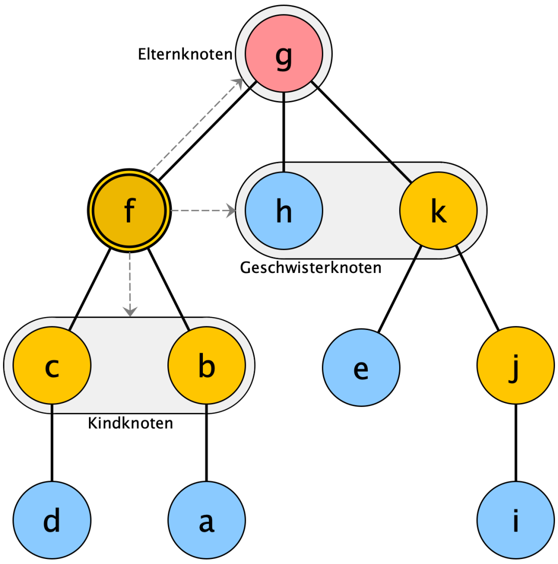

Abb. 24: »Verwandtschaftsknoten« eines Knotens in einem Baum (hier: »Verwandte« des Knoten f)

Für die Beziehungen der Knoten untereinander in einem Baum gibt es spezielle Namen:

Kindknoten

Alle Knoten, die von einem bestimmten Knoten aus durch einen Weg der Länge 1 erreichbar sind, heißen *Kindknoten* (manchmal auch *Kindsknoten*) oder einfach nur *Kinder* dieses Knotens. Beispielsweise sind in Abb. 24 die Knoten c und b Kindknoten des Knoten f.

Knoten, die keine Kindknoten haben, sind Blätter. Knoten, die mindestens einen Kindknoten haben, sind keine Blätter. Der einzige Knoten eines Baumes, der selbst nicht Kindknoten eines anderen Knotens ist, ist der Wurzelknoten.

Elternknoten

Die Beziehung in die andere Richtung heißt Elternknoten. Wenn Knoten X ein Kindknoten von Knoten Y ist, dann ist Knoten Y der Elternknoten von Knoten X. Jeder Knoten hat genau einen Elternknoten, davon ist nur der Wurzelknoten ausgenommen, der keinen Elternknoten hat. Blätter sind selbst nicht Elternknoten anderer Knoten. Alle Knoten, die keine Blätter sind, sind Elternknoten anderer Knoten.

Geschwisterknoten

Die Kindknoten des Elternknotens des Knotens X, die nicht mit X identisch sind, heißen Geschwisterknoten des Knotens X. Es ist nicht üblich, als Geschwisterknoten von sich selbst zu bezeichnen.

Weitere Bezeichnungen

Der Elternknoten eines Elternknotens wird manchmal als Großelternknoten bezeichnet. Ebenso kann man Uroßelternknoten usw. definieren, so lange, bis man den Wurzelknoten erreicht. Alle Knoten, die auf dem Pfad vom Wurzelknoten bis zum Elternknoten liegen, nennt man die **Vorgängerknoten**.

Entsprechend kann man auch Enkelknoten, Urenkelknoten usw., definieren. Die Gesamtheit dieser Knoten nennt man die **Nachfolgerknoten**. In einem Baum sind alle Knoten außer dem Wurzelknoten Nachfolgerknoten des Wurzelknotens, und der Wurzelknoten ist Vorgängerknoten aller Knoten, ausgenommen von sich selbst. Macht man einen beliebigen Knoten zur Wurzel eines Teilbaumes, dann besteht der ganze Teilbaum aus Nachfolgerknoten der neuen Wurzel, mit Ausnahme der Wurzel selbst.

3.1.7 **Reihenfolge der Kinder bzw. Geschwister**

In der reinen Graphentheorie haben die Kinder eines Knotens keine besondere Reihenfolge, wodurch auch die Geschwister keine besondere Reihenfolge haben. Es macht daher eigentlich keinen Sinn, von linken und rechten Geschwistern zu sprechen, oder von älteren und jüngeren, oder vorausgehenden und nachfolgenden Geschwistern. Ebenso wenig gibt es in der reinen Graphentheorie daher ein erstes oder letztes Kind eines Knotens.

Allerdings gibt es viele praktische Anwendungen von Bäumen, in denen die Kindknoten und daher auch die Geschwisterknoten sehr wohl eine klar definierte Reihenfolge haben. Ein Beispiel, das auf der Hand liegt, sind Darstellungen von Verwandtschaftsbeziehungen zwischen Menschen, die man oft (jedoch nicht immer) als Baum darstellen kann, und wovon die in 3.1.6 eingeführten Bezeichnungen entlehnt sind. Den direkten Nachkommen einer realen Person kann man sehr wohl, z.B. anhand ihres Geburtsdatums eine feste Reihenfolge zuordnen. Ebenso lässt sich z.B. das DOM (Document Objekt Model) eines HTML-Dokuments als Baum darstellen, innerhalb dessen die Kindelemente eines gemeinsamen Elternelements anhand der Reihenfolge des Auftretens im Quelltext eine fest Reihenfolge haben.