ST. PÖLTEN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

Informatik
& Security

Mathematische Grundlagen

Kein Prüfungsstoff!

Dipl.-Ing. Hubert Schölnast, BSc
Stand: 17. Jänner 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Naive Mengenlehre

1.1 Warum »naiv«?

Neben der hier behandelten »naiven Mengenlehre«, die bis Anfang des 20. Jahrhunderts verwendet wurde, gibt es noch die »axiomatische Mengenlehre«, deren erste Version 1907 von Ernst Zermelo beschrieben wurde. 1921 beseitigte Abraham Fraenkel einige Mängel in Zermelos Beschreibung, seitdem ist mit der axiomatischen Mengenlehre fast immer die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (»ZF«) gemeint. Sie bildet heute das Fundament so gut wie aller Zweige der Mathematik.

Eine Variante der ZF wird »ZFC« genannt, damit ist die Erweiterung um das umstrittene Auswahlaxiom (engl. »Auswahl« = »choice«) gemeint. Eine andere Variante heißt »ZFU« (ZF mit Urelementen). ZFCU enthält beide Erweiterungen.

Die vor 1907 verwendete Urform der Mengenlehre bekam die Beifügung »naiv« erst nachdem sich die ZF in der Mathematik etabliert hatte.

Die klare Formulierung der Mengenlehre mit Hilfe von Axiomen wurde notwendig, weil die ursprüngliche (und heute »naiv« genannte) Mengenlehre zu einer Reihe von Paradoxa führt und somit nicht geeignet ist, als Basis anderer mathematischer Disziplinen verwendet zu werden. Zwei dieser Paradoxa, die Russellsche Antimonie (Abschnitt 7.1, Seite 69) und die zweite Cantorsche Antimonie (Abschnitt 7.2, Seite 70) sind im Anhang A beschrieben.

Der Vollständigkeit halber sei aber auch erwähnt, der der österreichische Mathematiker Kurt Gödel im Jahr 1931 mit seinen beiden Unvollständigkeitssätzen bewiesen hat, dass jedes hinreichend mächtige formale System nicht zugleich vollständig und widerspruchsfrei sein kann. ZF (und erst recht die gesamte Mathematik) ist so ein formales System. Die Verbesserung der Mengenlehre durch Zermelo und Fraenkel ist daher auch nur das: Eine Verbesserung. Eine perfekte Mengenlehre kann es nicht geben.

Der in dieser Lehrveranstaltung behandelte Stoff berührt aber nicht die problematischen Teile der Mengenlehre. Aus diesem Grund, und weil die Mengenlehre selbst nicht zum eigentlichen Stoff dieser Lehrveranstaltung gehört, wird daher auf eine Beschreibung der Axiome von Zermelo und Fraenkel verzichtet. Wer sich dennoch dafür interessiert, hat mit »Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre« und »axiomatische Mengenlehre« Suchbegriffe, mit denen man im Internet viele weiterführende Quellen findet.

1.2 Element

1.2.1 Definition

Ein Element ist etwas, das sich von etwas anderem unterscheidet.

Alles was man sich vorstellen kann, kann ein Element sein. Auch alles was man sich nicht vorstellen kann, kann ein Element sein. Ebenso können sogar alle Dinge, von denen man nie im Leben geglaubt hätte, dass sie als Elemente infrage kommen könnten, Elemente sein.

1.2.2 Beispiele für Elemente

- Die Zahl 4
- Der Buchstabe G
- Das lateinische Alphabet
- Das griechische Alphabet
- Das Wort »Luft«
- Luft
- Der Mond
- Der Abstand des Mondes von der Erde
- Ein Apfel
- Ein anderer Apfel
- Ein Apfelbaum
- Eine Apfelplantage
- Apfelsaft
- Ein Glas voll Apfelsaft
- Durst
- …

1.2.3 Notation

Es gibt keine spezielle mathematische Notation für Elemente. Elemente können mit Hilfe von Buchstaben, Ziffern und beliebigen anderen Schriftzeichen notiert werden. Aus praktischen Gründen werden aber Elemente, die Zahlen sind, meist mit Ziffern geschrieben. Für allgemeine Elemente verwendet man gerne lateinische Kleinbuchstaben.

1.3 Menge

1.3.1 Definition

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Elementen.

Dabei gelten folgende Regeln:

1. Eine Zusammenfassung von Elementen ist nur dann eine Menge, wenn für jedes denkbare Element eindeutig feststeht, ob es zur Menge gehört oder nicht.
2. Wenn ein Element zu einer Menge gehört, kommt es in der Menge genau einmal vor. Mit anderen Worten: Es ist nicht möglich, dass ein und dasselbe Element mehrfach in einer Menge existiert.
3. Bei Mengen geht es ausschließlich darum, welche Elemente zur Menge gehören und welche nicht. Insbesondere gibt es unter den Elementen einer Menge keine Reihenfolge. Die Darstellungen $\{1, \text{simsalabim}, \therefore, \heartsuit\}$ und $\{\heartsuit, 1, \therefore, \text{simsalabim}\}$ bezeichnen also genau dieselbe Menge.

Anschaulich kann man sich eine Menge wie den Inhalt einer Schachtel oder eines anderen Behälters vorstellen. Wenn man die Analogie zu Schachteln verwendet, muss man sich aber der Tatsache bewusst sein, dass die Schachtel nicht die Menge ist (sie ist auch kein Element der Menge). Nur der Inhalt der Schachtel ist die Menge, nicht die Schachtel selbst.

1.3.2 Notation

Als Bezeichner (Namen) von Mengen verwendet man üblicherweise lateinische Großbuchstaben ($A, B, C, \ldots$). Das ist kein Zwang, sondern eine Konvention. Von dieser Konvention kann bei Vorliegen vernünftiger Gründe jederzeit abgewichen werden.

Für spezielle Zahlenmengen verwendet man lateinische Großbuchstaben mit Doppelstrich (z.B. $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots$), daher sollte man diese Doppelstrich-Symbole wenn möglich nicht für andere Mengen verwenden. Das ist zwar auch nicht explizit verboten, würde aber Verwirrung stiften.

Den Inhalt einer Menge schreibt man üblicherweise in geschwungenen Klammern. Die Klammern selbst stellen so etwas wie die Schachtel in der oben beschriebenen Anschauung dar. Nur das, was zwischen den Klammern steht, gehört zur Menge. Die Klammern selbst gehören nicht zur Menge, sie sind auch nicht die Menge, sie zeigen aber an, dass das, was zwischen ihnen steht, eine Menge ist.

An dieser Stelle sei auch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass ein Element nicht dasselbe ist wie eine Menge, die genau dieses eine Element enthält.

$$x \neq \{x\}$$

- x Ein Element
- $\{x\}$ Eine Singleton-Menge (eine Menge, die genau ein Element enthält)

Um eine Menge darzustellen, kann man die einzelnen Elemente innerhalb der Klammern auflisten, oder man kann zwischen den Klammern eine gemeinsame Eigenschaft beschreiben, die alle Elemente der Menge haben, die aber auf kein Ding außerhalb der Menge zutrifft.

In vielen Fällen ist es auch möglich, einige wenige Elemente anzugeben, aus denen sich ein Bildungsgesetz ablesen lässt. Alle weiteren Elemente, die mit diesem Bildungsgesetz erzeugt werden können, werden dann durch drei Punkte angedeutet. Weil diese Art der Mengenbeschreibung so gut wie nie eindeutig ist, muss in diesem Fall im Begleittext immer eine explizitere Beschreibung der Menge mitgeliefert werden.

1.3.3 **Beispiele**

$$A = \{+, -, \times, \div\}$$
$$B = \{x \mid x = \text{ein weiblicher Vorname}\}$$
$$C = \{H, He, Li, Be, B, C, N, O, F, \ldots\}$$
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

- Die Menge A enthält vier verschiedene mathematische Operatoren.
- Die Beschreibung der Menge B ist wie folgt zu lesen: »B ist die Menge aller x, für die gilt, dass x ein weiblicher Vorname ist«
  - B — Name einer Menge
  - $=$ — ist gleich
  - $\{\ldots\}$ — Menge
  - x — ein Platzhalter
  - $\mid$ — »für das/den gilt«
  - $\text{ein weiblicher Vorname}$ — eine Bedingung

  Denkbar wäre es auch, folgendes zu schreiben: $B = \{\text{alle weiblichen Vornamen}\}$. Das ist in diesem Fall sicher leichter intuitiv erfassbar als die offizielle Schreibweise. Üblicherweise wird die Bedingung aber nicht mit deutschen Wörtern ausformuliert, sondern mit mathematischen Symbolen geschrieben, und dann ist es unverzichtbar, die Schreibweise mit dem senkrechten Strich zu verwenden.

- Die ersten 9 Elemente der Menge C stimmen mit den Symbolen der ersten 9 chemischen Elemente im Periodensystem überein. Daher kann man die drei Punkte so interpretieren, dass mit C die Menge aller chemischen Elemente gemeint ist. Denkbar ist aber auch die Interpretation, dass die Menge aller chemischen Elementsymbole gemeint ist. Auch möglich wäre, dass die angegebenen Symbole gar nichts mit Chemie zu tun haben und nur zufällig mit Elementsymbolen übereinstimmen.

  Wie man sieht, lässt die Schreibweise mit den Fortsetzungspunkten viel Platz für Interpretationen und Spekulationen und sollte daher äußerst sparsam verwendet werden. Wie schon erwähnt sollte man bei dieser Schreibweise im Begleittext auch immer explizit angeben, was wirklich gemeint ist.

- $\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen. Das Symbol $\mathbb{N}$ ist genau dafür reserviert und sollte niemals für etwas anderes verwendet werden.

1.3.4 **Die Symbole $\in, \ni, \notin$ und $\not\ni$**

Den Umstand, dass ein Element zu einer Menge gehört, zeigt man mit dem Symbol $\in$ an. (Sprich: »ist Element von«.) Bezogen auf die vier Mengen vom obigen Beispiel gilt dann:

$$+ \in A$$
$$\text{Lisa} \in B$$
$$Au \in C$$
$$17 \in \mathbb{N}$$

Das Symbol $\ni$ kann man verwenden, wenn Menge und Element vertauscht sind. (Davon wird aber abgeraten, außer es gibt einen zwingenden Grund, das so zu schreiben.):

$$A \ni +$$
$$\mathbb{N} \ni 17$$

Zur Verneinung (etwas ist nicht in einer Menge enthalten) wird das Symbol durchgestrichen:

$$1 \notin A$$
$$\mathbb{N} \not\ni \pi$$

1.3.5 **Gleichheit zweier Mengen**

Zwei Mengen sind genau dann gleich bzw. identisch, wenn sie genau dieselben Elemente enthalten. Der Umstand, dass sich in einer Menge ein Element finden lässt, das in der anderen Menge nicht vorkommt, ist gleichbedeutend damit, dass die beiden Mengen verschieden sind.

Zur Sicherheit sei hier nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Reihenfolge, in der man die einzelnen Elemente innerhalb einer Menge anordnet, keine Rolle spielt.

{🐭, 🐰, 🐷} = {🐭, 🐷, 🐰}
{🐭, 🐰, 🐷} ≠ {🐭, 🐰, 🐷, 🐵}
{🐭, 🐰, 🐷} ≠ {🐭, 🦊, 🐷}

1.3.6 **Die leere Menge**

Mengen müssen nicht zwingend etwas enthalten. Wenn eine Menge nichts enthält, bezeichnet man sie als »leere Menge« (vergleichbar mit dem Inhalt einer leeren Schachtel). Als Bezeichner der leeren Menge verwendet man das Symbol $\emptyset$. (Das Symbol $:=$ bedeutet »ist definiert als«)

$$\emptyset := \{\,\}$$

Beachte, dass es nur eine einzige leere Menge gibt (siehe 1.3.5 *Gleichheit zweier Mengen*). Die Menge aller unsichtbaren Menschen, die Menge aller flugfähigen Tiefseequallen und die Menge aller durch 2 teilbaren ungeraden Zahlen sind genau identisch. Das sind nicht drei verschiedene leere Mengen, sondern das ist in allen drei Fällen genau dieselbe leere Menge, nämlich die einzige leere Menge, die es gibt.

1.4 Geordnete Mengen (Tupel)

Eine bereits beschriebene Eigenschaft von Mengen ist, dass für die Elemente innerhalb einer Menge keine Reihenfolge oder Ordnung definiert ist. $\{a, b, c\}$ und $\{b, c, a\}$ sind daher gleichwertige Darstellungen derselben Menge. Aber bereits die Schreibweise mit Fortsetzungspunkten macht deutlich, dass die Reihenfolge manchmal doch eine Rolle spielt. Es macht einen Unterschied, ob man z.B. die Menge der natürlichen Zahlen mit $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ oder mit $\{78, 5, 2350, 1, \dots\}$ definiert. Im ersten Fall ist relativ klar, was gemeint ist, im zweiten Fall kann man nur mit sehr viel Fantasie erkennen, dass damit alle natürlichen Zahlen gemeint sein sollen.

Viele Mengen verfügen aus unterschiedlichen Gründen über eine innere Ordnung. (Die Menge der natürlichen Zahlen ist ein Beispiel dafür, ebenso die Menge der chemischen Elementsymbole.)

Wenn diese innere Ordnung für den zu untersuchenden Sachverhalt irrelevant ist, kann man diese Reihenfolge einfach ignorieren, und die Menge wie jede andere ungeordnete Menge behandeln. Ist die Reihenfolge aber wichtig, geht man zu geordneten Mengen über, die man auch »Tupel« nennt. Tupel sind also eine Erweiterung des Mengen-Begriffs. (Jedes Tupel ist eine Menge, aber nicht jede Menge ist ein Tupel.)

1.4.1 Tupel bestimmter Größen (Paare, Tripel, Quadrupel, n-Tupel)

- Das leere Tupel und Tupel mit genau einem Element unterscheiden sich in keinerlei Hinsicht von den jeweiligen Mengen. Für sie gibt es daher keine besonderen Bezeichnungen.
- Ein Tupel mit 2 Elementen nennt man ein **Paar** oder ein 2-Tupel.
  Wenn man die Tatsache, dass die Reihenfolge wichtig ist, besonders hervorheben möchte, spricht man manchmal auch von einem »geordneten Paar«. Weil Paare aber per Definition immer geordnet sind (in der Mathematik gibt es so etwas wie ein *ungeordnetes Paar* nicht), ist diese zusätzliche Angabe aber eigentlich überflüssig. Sie ist aber auch nicht falsch und kann manchmal helfen, Missverständnisse zu vermeiden.
- Ein Tupel mit 3 Elementen nennt man ein Tripel oder 3-Tupel.
- Ein Tupel mit 4 Elementen nennt man ein Quadrupel oder 4-Tupel.
- Ein Tupel mit 5 Elementen nennt man ein Quintupel oder 5-Tupel.

Das Schema *Tripel – Quadrupel – Quintupel* lässt sich mit weiteren lateinischen Zahlwörtern im Prinzip beliebig fortsetzen, das ist jedoch nicht üblich. Tupel, die n Elemente enthalten, bezeichnet man als n-Tupel.

Wenn man nicht näher auf die Anzahl eingehen will, genügt das Wort *Tupel*.

1.4.2 Notation

Für geordnete Mengen gilt alles, das auch für ungeordnete Mengen gilt. Es gibt aber eine geringfügig andere Schreibweise (runde Klammern anstelle von geschwungenen Klammern).

- Menge $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$
- Tupel $(a, b, c) \neq (b, c, a)$

1.4.3 Gleiche Elemente in einem Tupel

Aus der wohldefinierten Reihenfolge der Elemente in einem Tupel ergibt sich ein weiterer wichtiger Unterschied zu den ungeordneten Mengen: Wenn es nämlich einen Unterschied macht, ob das Element x an erster oder an zweiter Stelle steht,

$$(x, \dots) \neq (\dots, x)$$

dann kann die Existenz des Elements x an der ersten Stelle auch kein Grund dafür sein, dass an allen anderen Stellen des Tupels das Element x verboten sein soll. Mit anderen Worten: In geordneten Mengen ist auch das erlaubt:

$$(x, x)$$

Ein und dasselbe Element darf also in einem Tupel auch mehrfach vorkommen. In ungeordneten Mengen hingegen kommt jedes Element, das in der Menge enthalten ist, genau einmal vor.

1.5 Mächtigkeit von Mengen

Der Begriff »Mächtigkeit« bezeichnet die Anzahl der Elemente, die eine Menge enthält. (Der sehr ähnliche Begriff »Größe« bezieht sich auf Zahlen, nicht auf Mengen.)

Bei endlichen Mengen ist die Mächtigkeit stets eine natürliche Zahl. Tatsächlich ist es sogar so, dass sich die natürlichen Zahlen anhand der Mächtigkeiten endlicher Mengen definieren lassen (siehe 4.2.3 auf Seite 49).

1.5.1 Notation

Notiert wird der Mächtigkeitsoperator durch zwei senkrechte Striche, welche die Menge umschließen:

$$|A| = 4$$

$$|\{+, -, \times, \div\}| = 4$$

1.5.2 Mächtigkeitsvergleich – Gleichmächtigkeit

Trivialerweise sind zwei gleiche Mengen immer gleich mächtig. (Diese eigentlich sehr einleuchtende Erkenntnis wird in 1.5.4 noch wichtig werden.)

$$A = B \quad \Longrightarrow \quad |A| = |B|$$

Zwei Mengen sind aber auch dann gleich mächtig, wenn sie gleich viele Elemente enthalten. Mit anderen Worten: wenn sie dieselbe Mächtigkeit haben.

Aber wie ermittelt man diese Mächtigkeit?

1.5.3 Mächtigkeitsvergleich durch Abzählen

Wenn man zwei endliche Mengen miteinander vergleicht, kann man in beiden Mengen die Elemente abzählen. Man erhält dann zwei natürliche Zahlen. Die Menge mit dem größeren Zählergebnis ist die mächtigere Menge, und wenn beide Ergebnisse gleich sind, sind auch die beiden Mächtigkeiten gleich.

$$|\{\text{Marmor}, \text{Stein}, \text{Eisen}\}| = |\{\yen, €, \$\}| \qquad 3 = 3$$

$$|\{♤, ♧, \heartsuit, \lozenge\}| > |\{♀, ♂\}| \qquad 4 > 2$$

$$|\{\rightarrow, \rightrightarrows, ⇶\}| < |\{\rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\}| \qquad 3 < 4$$

Wenn eine Menge unendlich viele Elemente enthält, eine andere aber nur endlich viele, dann ist klarerweise die unendliche Menge mächtiger als die endliche.

$$|\{\text{a}, \text{b}, \text{c}, \dots, \text{x}, \text{y}, \text{z}\}| \quad < \quad |\mathbb{N}|$$

Aber wie geht man vor, wenn man die Mächtigkeiten von zwei unendlich großen Mengen vergleichen will?

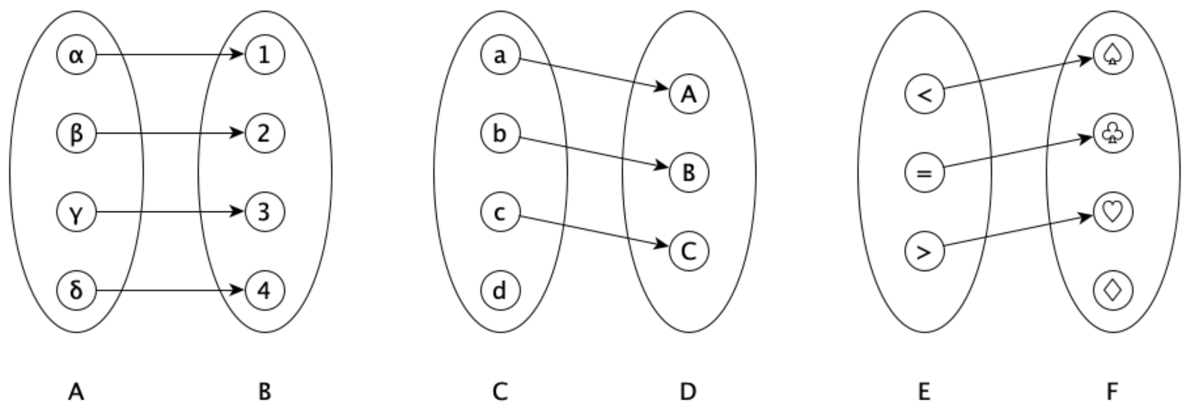
$$|\mathbb{Q}| \quad ? \quad |\mathbb{N}|$$

Abzählen funktioniert bei unendlich großen Mengen nicht. Aber bedeutet denn die Tatsache, dass zwei Mengen unendlich groß sind, nicht automatisch, dass sie gleich mächtig sind? Die Antwort lautet: Nein. (Siehe Anhang: Beweis 6.3 auf Seite 64.) Zwei verschiedene unendlich große Mengen können unterschiedlich mächtig sein.

Es gibt aber eine alternative Methode zum Vergleich der Mächtigkeiten zweier Mengen, die ganz ohne Abzählen auskommt. (In Wahrheit ist auch Abzählen nichts weiter als eine Variante der nun folgenden Methode.)

1.5.4 **Mächtigkeitsvergleich durch Paarbildung**

Man nimmt ein Element der einen Menge und ein Element der anderen Menge, und verbindet die beiden zu einem Paar. Anschließend wiederholt man diesen Vorgang mit je einem Element, das noch zu keinem Paar gehört. Das macht man so lange, bis man bei einer der beiden Mengen alle Elemente verbraucht hat. Wenn man dann auch bei der anderen Menge alle Elemente verbraucht hat, sind beide Mengen gleich mächtig.



- Die Mengen A und B sind gleichmächtig, weil bei der Paarbildung weder in A noch in B Elemente übrigbleiben.
$$|A| = |B|$$
- Die Menge C ist mächtiger als die Menge D, weil bei der Paarbildung in C mindestens ein Element übriggeblieben ist, obwohl alle Elemente aus D Paaren zugeordnet werden konnten.
$$|C| > |D|$$
- Für E und F gilt sinngemäß das gleiche wie für C und D, lediglich in umgekehrter Reihenfolge.
$$|E| < |F|$$

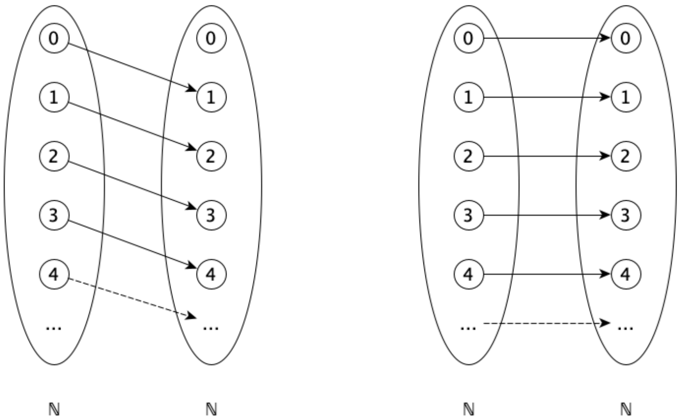
Wenn man Paare bildet, so wie es hier beschrieben ist, und wenn jedes Element jeder Menge in genau einem Paar enthalten ist (so wie im Fall von A und B), dann nennt man diese Paarbildung eine »bijektive Funktion« (siehe 2.5.3 auf Seite 43).

Beachte, dass hier nicht gezählt wurde (jedenfalls nicht im herkömmlichen Sinn). Die genaue Anzahl der Paare ist hier nicht relevant. Es kommt nur darauf an, ob auf einer Seite etwas übrigbleibt. Falls etwas übrigbleibt, ist auch egal, wie viele Elemente übrigbleiben.

Diese Methode hat den Vorteil, dass man sie auch auf unendliche Mengen anwenden kann. Man muss nur eine bijektive Abbildung der beiden Mengen aufeinander finden. Wenn es eine bijektive Abbildung gibt, sind die beiden Mengen gleich mächtig.

Im Gegensatz zu endlichen Mengen kann man aber auch immer Abbildungen zwischen zwei unendlichen Mengen finden, die nicht bijektiv sind.

Beispiel:



Hier werden natürliche Zahlen auf natürliche Zahlen abgebildet. Beide Diagramme zeigen also Abbildungen von $\mathbb{N}$ auf sich selbst.

Linkes Bild: Hier wird jede natürliche Zahl mit ihrem Nachfolger zu einem Paar verbunden. Das heißt, man bildet die Paare $(0,1), (1,2), (2,3)$ usw. Das führt dazu, dass alle Zahlen als linkes Element eines Paares verwendet werden, aber die Zahl 0 wird bei den rechten Elementen nicht verwendet, sie bleibt also über. Weil aus der rechten Menge etwas übrigbleibt, könnte man daraus schließen, dass die rechte Menge mächtiger als die linke sei. Das kann aber nicht sein, weil die linke und die rechte Menge ja dieselbe Menge sind (nämlich die Menge der natürlichen Zahlen). Wir erinnern uns (Abschnitt 1.5.2 auf Seite 12): Wenn zwei Mengen gleich sind, sind sie auch gleich mächtig.

Das rechte Bild zeigt hingegen eine bijektive Abbildung, bei der jedes Element auf sich selbst abgebildet wird. Trivialerweise werden auf diese Weise alle Zahlen verwendet, und nichts bleibt über.

Unter den vielen denkbaren Abbildungen der natürlichen Zahlen auf sich selbst gibt es, wie das linke Bild zeigt, auch viele, die nicht bijektiv sind. Das ist bei allen unendlich großen Mengen so, und es ist unausweichlich. Aber das stört nicht weiter. Denn wenn sich auch nur eine einzige bijektive Abbildung finden lässt, beweist deren Existenz, dass die verglichenen Mengen gleich mächtig sind. Und dieses Argument gilt selbstverständlich auch dann, wenn man zwei verschiedene Mengen miteinander vergleicht.

Das heißt: Wenn man beweisen will, dass zwei unendliche Mengen gleich mächtig sind, muss man nur eine einzige bijektive Abbildung angeben, welche die Elemente der einen Menge auf die andere abbildet. Im Beweis 6.2 auf Seite 62 wird auf diese Weise bewiesen, dass es gleich viel natürliche Zahlen wie rationale Zahlen (»Bruchzahlen«) gibt: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$

Will man aber beweisen, dass zwei unendlich große Mengen verschieden mächtig sind, dann muss man beweisen, dass es zwischen ihnen unter gar keinen Umständen eine bijektive Abbildung geben kann. Das wird in Beweis 6.3 auf Seite 64 vorgeführt. Dort wird bewiesen, dass $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

1.6 Teilmenge, Obermenge

1.6.1 Definition

Wenn die Menge $\boldsymbol{O}$ alle Elemente enthält, die sich in der Menge $\boldsymbol{T}$ befinden, dann ist $\boldsymbol{T}$ eine Teilmenge der Menge $\boldsymbol{O}$ und $\boldsymbol{O}$ ist eine Obermenge der Menge $\boldsymbol{T}$.

Andere Formulierung:

Wenn alle Elemente, die in der Menge T enthalten sind, auch in der Menge O vorkommen, dann ist T eine Teilmenge der Menge O und O ist eine Obermenge der Menge T.

1.6.2 Notation

Wenn T eine Teilmenge von O ist, schreibt man das mit dem Symbol ⊆. (Sprich: »ist Teilmenge von«.)

$$T \subseteq O$$

Wenn O eine Obermenge von T ist, schreibt man das mit dem Symbol ⊇. (Sprich: »ist Obermenge von«.)

$$O \supseteq T$$

Teilmengen und Obermengen sind von ihrer Bedeutung her eigentlich nicht schwer zu verstehen. Was manchmal Probleme bereitet, sind die Symbole. Es kann helfen, sich das Symbol ⊆ als »Teilmenge mit optionaler Gleichheit« und ⊇ als »Obermenge mit optionaler Gleichheit« zu merken.

Die Definition erlaubt, dass die Obermenge O zusätzliche Elemente enthält, die in der Teilmenge T nicht vorkommen. Das ist auch das, was man in den meisten Fällen meint. Aber das ist nicht zwingend erforderlich. Die Definition erlaubt auch (und das sei hier ganz ausdrücklich erwähnt, weil es manchmal vergessen wird), dass die Obermenge O keine zusätzlichen Elemente enthält. In diesem Fall enthält O also ganz genau dieselben Elemente wie T. Das bedeutet dann aber, dass die beiden Mengen gleich sind: $O = T$. (Wir erinnern uns an Abschnitt 1.3.5, *Gleichheit zweier Mengen*.)

Das heißt in weiterer Folge auch, dass jede Menge sowohl eine Teilmenge als auch eine Obermenge von sich selbst ist.

$$M \subseteq M \text{ (gilt für alle Mengen } M\text{)}$$

$$M \supseteq M \text{ (gilt für alle Mengen } M\text{)}$$

1.6.3 Die leere Menge als universelle Teilmenge

Es sei auch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Definition nicht explizit verlangt, dass die Teilmenge T überhaupt irgend etwas enthält. T darf auch leer sein, was bedeutet, dass T dann die leere Menge ist. Das hat zur Folge, dass die leere Menge $\emptyset$ eine Teilmenge jeder Menge ist, und dass jede Menge (einschließlich der leeren Menge) eine Obermenge der leeren Menge $\emptyset$ ist.

$$M \subseteq \emptyset \text{ (gilt für alle Mengen } M\text{)}$$
$$\emptyset \supseteq M \text{ (gilt für alle Mengen } M\text{)}$$

1.6.4 Echte Teilmenge, echte Obermenge

Manchmal möchte man explizit ausdrücken, dass die Obermenge mindestens ein Element enthält, das in der Teilmenge nicht vorhanden ist. Man spricht dann von einer »echten Teilmenge« bzw. einer »echten Obermenge«.

Die dazugehören Symbole sind:

- $\subset$ »ist echte Teilmenge von« $T \subset O$
- $\supset$ »ist echte Obermenge von« $O \supset T$

Man kann sich die Symbole auch als »Teilmenge/Obermenge ohne optionale Gleichheit« merken.

Leider unterscheiden manche Autoren nicht streng zwischen den Symbolen $\subseteq$ und $\subset$ bzw. zwischen $\supseteq$ und $\supset$. Insbesondere wird bei der Verwendung der Symbole $\subset$ und $\supset$ oft vergessen, dass damit »echte« Beziehungen gemeint sind, die eine Gleichheit ausschließen. Denn wenn die Obermenge mindestens ein Element enthält, das der Teilmenge fehlt, können die beiden Mengen nicht gleich sein:

$$T \subset O \quad \Longrightarrow \quad T \neq O$$
$$O \supset T \quad \Longrightarrow \quad O \neq T$$

Aus diesem Grund wurde von einigen Autoren ein weiteres Symbol-Paar eingeführt, dass die leider um sich greifende Zweideutigkeit der Symbole $\subset$ und $\supset$ umgeht. Das sind die Symbole $\subsetneq$ und $\supsetneq$. Sie bedeuten ganz genau dasselbe wie $\subset$ und $\supset$. Es wird aber empfohlen, die Symbole $\subsetneq$ und $\supsetneq$ nicht zu verwenden. (Warum, wird bei den negierten Symbolen klar werden.)

✅ $T \subset O \quad \Leftrightarrow \quad T \subsetneq O$ 🚫
✅ $O \supset T \quad \Leftrightarrow \quad O \supsetneq T$ 🚫

1.6.5 Negierte Beziehungen

Wie auch sonst üblich, werden negierte Beziehungen dadurch dargestellt, dass das jeweilige Relations-Symbol durchgestrichen wird:

- A ist keine Teilmenge von B $\quad A \nsubseteq B$
- A ist keine Obermenge von B $\quad A \nsupseteq B$
- A ist keine echte Teilmenge von B $\quad A \not\subset B$
- A ist keine echte Obermenge von B $\quad A \not\supset B$

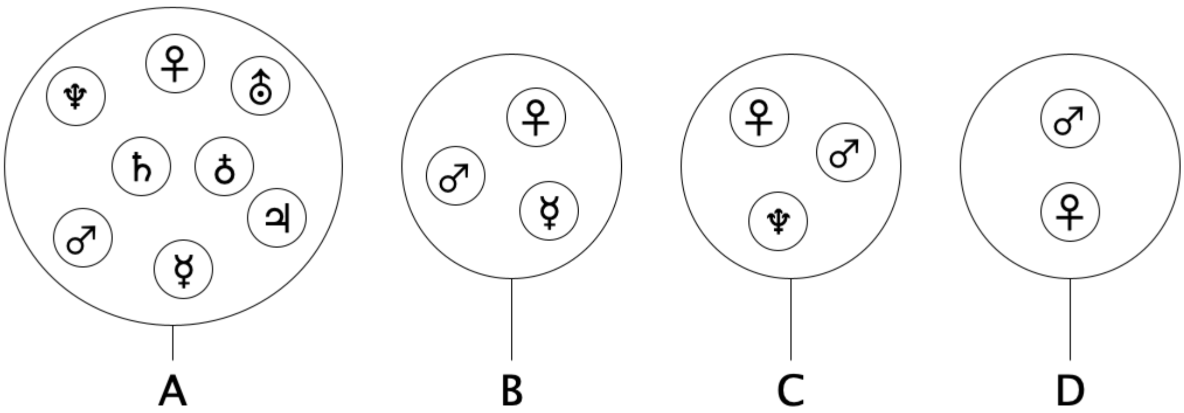
Beachte, dass $\nsubseteq$ (»ist keine Teilmenge von«) etwas ganz anderes bedeutet als $\subsetneq$ (»ist eine echte Teilmenge von«). (Sinngemäßes gilt auch für auch für $\nsupseteq$ und $\supsetneq$.)

Beachte auch, dass es für $\subsetneq$ und $\supsetneq$ keine negierten Versionen gibt, bzw. dass man zum Negieren dieser Symbole die Symbole $\not\subset$ und $\not\supset$ verwenden muss. Die Symbole $\not\subsetneq$ und $\not\supsetneq$ sind verwirrend, absolut unüblich und in den meisten Formeleditoren auch gar nicht verfügbar.

Um Verwirrungen und Irrtümer zu vermeiden, wird daher dringend empfohlen, nur diese acht Symbole zu verwenden:

$$\subseteq, \supseteq, \subset, \supset, \nsubseteq, \nsupseteq, \not\subset, \not\supset$$

1.6.6 **Beispiele**



$A \subseteq A$	$A \not\subset A$	$A \supseteq A$	$A \not\supset A$	$B \subseteq A$	$B \subset A$	$B \nsupseteq A$	$B \not\supset A$
$A \nsubseteq B$	$A \not\subset B$	$A \supseteq B$	$A \supset B$	$B \subseteq B$	$B \not\subset B$	$B \supseteq B$	$B \not\supset B$
$A \nsubseteq C$	$A \not\subset C$	$A \supseteq C$	$A \supset C$	$B \nsubseteq C$	$B \not\subset C$	$B \nsupseteq C$	$B \not\supset C$
$A \nsubseteq D$	$A \not\subset D$	$A \supseteq D$	$A \supset D$	$B \nsubseteq D$	$B \not\subset D$	$B \supseteq D$	$B \supset D$
$C \subseteq A$	$C \subset A$	$C \nsupseteq A$	$C \not\supset A$	$D \subseteq A$	$D \subset A$	$D \nsupseteq A$	$D \not\supset A$
$C \nsubseteq B$	$C \not\subset B$	$C \nsupseteq B$	$C \not\supset B$	$D \subseteq B$	$D \subset B$	$D \nsupseteq B$	$D \not\supset B$
$C \subseteq C$	$C \not\subset C$	$C \supseteq C$	$C \not\supset C$	$D \subseteq C$	$D \subset C$	$D \nsupseteq C$	$D \not\supset C$
$C \nsubseteq D$	$C \not\subset D$	$C \supseteq D$	$C \supset D$	$D \subseteq D$	$D \not\subset D$	$D \supseteq D$	$D \not\supset D$

1.6.7 Mächtigkeiten

Für die Mächtigkeiten von endlichen Teil- und Obermengen gilt folgendes: (Das kann ebenfalls helfen, sich das Aussehen der Symbole zu merken)

$$
\begin{array}{lcll}
T \subseteq O & \Longrightarrow & |T| \leq |O| & \text{gilt immer} \\
O \supseteq T & \Longrightarrow & |O| \geq |T| & \text{gilt immer} \\
T \subset O & \Longrightarrow & |T| < |O| & \text{nur wenn } T \text{ endlich ist} \\
O \supset T & \Longrightarrow & |O| > |T| & \text{nur wenn } T \text{ endlich ist}
\end{array}
$$

Achtung! Die letzten beiden Zeilen gelten nicht für unendlich große Mengen! Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist eine echte Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, trotzdem sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gleich mächtig (siehe Beweis 6.2 auf Seite 62).

$$
\begin{array}{lcll}
T \subset O & \Longrightarrow & |T| \leq |O| & \text{wenn } T \text{ unendlich ist} \\
O \supset T & \Longrightarrow & |O| \geq |T| & \text{wenn } T \text{ unendlich ist}
\end{array}
$$

Achtung! Die Vermutung, dass ähnliches auch für negierte Beziehungen gelten müsse, ist falsch! Das soll anhand dieser drei Mengen veranschaulicht werden:

$$
\begin{array}{lcl}
A = \{1\} & \Longrightarrow & |A| = 1 \\
B = \{a, b\} & \Longrightarrow & |B| = 2 \\
C = \{\Delta, \nabla\} & \Longrightarrow & |C| = 2
\end{array}
$$

Keine dieser drei Mengen ist Teilmenge oder Obermenge einer der beiden anderen (und daher auch nicht echte Teilmenge oder echte Obermenge einer der beiden anderen). Daher gelten alle folgenden Beziehungen:

$$
\begin{array}{cccccccc}
A \nsubseteq B & B \nsubseteq A & A \nsupseteq B & B \nsupseteq A & A \not\subset B & B \not\subset A & A \not\subset B & B \not\subset A \\
A \nsubseteq C & C \nsubseteq A & A \nsupseteq C & C \nsupseteq A & A \not\subset C & C \not\subset A & A \not\subset C & C \not\subset A \\
B \nsubseteq C & C \nsubseteq B & B \nsupseteq C & C \nsupseteq B & B \not\subset C & C \not\subset B & B \not\subset C & C \not\subset B
\end{array}
$$

Für die Mächtigkeiten der drei Mengen gilt aber:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
|A| < |B| & \Longleftrightarrow & |B| > |A| & & & \Longleftrightarrow & & & |A| \ngeq |B| & \Longleftrightarrow & |B| \nleq |A| \\
1 < 2 & \Longleftrightarrow & 2 > 1 & & & \Longleftrightarrow & & & 1 \ngeq 2 & \Longleftrightarrow & 2 \nleq 1 \\
|A| < |C| & \Longleftrightarrow & |C| > |A| & & & \Longleftrightarrow & & & |A| \ngeq |C| & \Longleftrightarrow & |C| \nleq |A| \\
 & & & & & & & & & & \\
|B| \nless |C| & \Longleftrightarrow & |C| \ngtr |B| & \Longleftarrow & |B| = |C| & \Longleftrightarrow & |C| = |B| & \Longrightarrow & |B| \geq |C| & \Longleftrightarrow & |C| \leq |B| \\
2 \nless 2 & \Longleftrightarrow & 2 \ngtr 2 & \Longleftarrow & 2 = 2 & \Longleftrightarrow & 2 = 2 & \Longrightarrow & 2 \geq 2 & \Longleftrightarrow & 2 \leq 2
\end{array}
$$

1.7 Potenzmengen

1.7.1 Definition

Die Potenzmenge einer Menge ist die Menge aller Teilmengen, die man aus den Elementen dieser Menge bilden kann.

Aufgrund dieser Definition ist bereits klar, dass jedes Element einer Potenzmenge selbst wieder eine Menge ist.

1.7.2 Notation

Wenn A eine Menge ist, schreibt man ihre Potenzmenge wie folgt:

$$\mathcal{P}(A)$$

1.7.3 Beispiele

- **Leere Menge** (die Menge, die 0 Elemente enthält)

  Wenn A die leere Menge ist, enthält die Potenzmenge von A genau 1 Element, nämlich die leere Menge:

  $$A = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$$
  $$\text{bzw.} \quad A = \{\,\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}(A) = \big\{\{\,\}\big\}$$

  Betrachten wir gleich auch die Mächtigkeiten:

  $$|A| = 0 \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{P}(A)| = 1$$

- Eine Singletonmenge (eine Menge, die genau $\mathbf{1}$ Elemente enthält)
  Wenn A 1 Element enthält, enthält die Potenzmenge von A genau 2 Elemente, nämlich die leere Menge und die Menge A:

  $$A = \{a\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$$
  $$\text{bzw.} \quad A = \{a\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}(A) = \big\{\{\,\}, \{a\}\big\}$$

  $$|A| = 1 \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{P}(A)| = 2$$

- Eine Menge, die **2** Elemente enthält

  Wenn A 2 Element enthält, enthält die Potenzmenge von A genau 4 Elemente:

  $$A = \{a, b\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$$
  $$\text{bzw.} \quad A = \{a, b\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}(A) = \big\{\{\,\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$$

  $$|A| = 2 \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{P}(A)| = 4$$

- Eine Menge, die **3** Elemente enthält

  Wenn A 3 Element enthält, enthält die Potenzmenge von A genau 8 Elemente:

$$A = \{a, b, c\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}(A) = \big\{\{\,\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$$

$$|A| = 3 \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{P}(A)| = 8$$

- Eine Menge, die **4** Elemente enthält

  Wenn A 4 Element enthält, enthält die Potenzmenge von A genau 16 Elemente:

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}(A) = \begin{Bmatrix} \{\,\}, & \{a\}, & \{b\}, & \{a, b\}, & \{c\}, & \{a, c\}, & \{b, c\}, & \{a, b, c\}, \\ \{d\}, & \{a, d\}, & \{b, d\}, & \{a, b, d\}, & \{c, d\}, & \{a, c, d\}, & \{b, c, d\}, & \{a, b, c, d\} \end{Bmatrix}$$

$$|A| = 4 \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{P}(A)| = 16$$

1.7.4 Mächtigkeit einer Potenzmenge

Anhand der angeführten Beispiele kann man folgendes sehr gut erkennen:

Wenn man von einer bestimmten Menge M bereits die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ kennt, und dann aus der Menge M eine neue Menge M' erzeugt, die genau 1 Element mehr enthält, dann kann man aus der ursprünglichen Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die neue Potenzmenge $\mathcal{P}(M')$ ganz einfach dadurch erzeugen, dass man jedes Element von $\mathcal{P}(M)$ dupliziert und dem Duplikat genau jenes Element hinzufügt, das man M hinzugefügt hat.

Für die Mächtigkeit einer Potenzmenge bedeutet das, dass sich die Mächtigkeit der Potenzmenge verdoppelt, wenn sich die Mächtigkeit der Urmenge um 1 erhöht.

Da die Mächtigkeit der Potenzmenge der leeren Menge 1 ist, und $1 = 2^0$, bedeutet das, dass die Mächtigkeit der Potenzmenge jeder beliebigen Menge berechnet werden kann, indem man zwei hoch die Mächtigkeit der ursprünglichen Menge rechnet.

$$|A| = x \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{P}(A)| = 2^x$$

Insbesondere gilt daher immer:

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|$$

Für endliche Mengen ist das unmittelbar aus dem hier Gesagten ableitbar, für unendliche Mengen muss das auf anderem Weg nachgewiesen werden. Wie man das auch für unendlich große Mengen beweist, kann man im Beweis 6.4 ab Seite 66 nachlesen.

1.8 Vereinigungsmenge

1.8.1 Definition

Die Vereinigungsmenge zweier Mengen ist die kleinste (am wenigsten mächtige) Menge, die Obermenge beider Mengen ist.

Andere Formulierung:

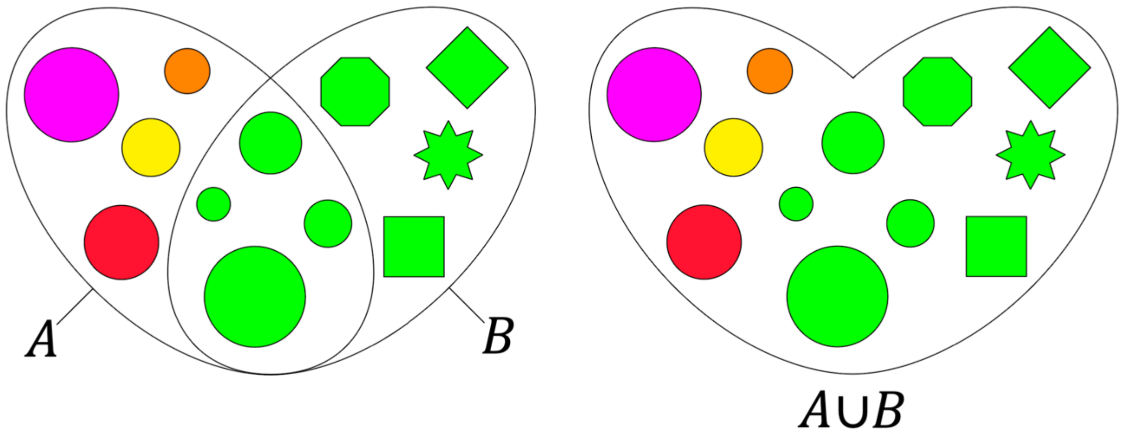
Wenn man die Vereinigungsmenge der Mengen A und B bildet, sind im Ergebnis alle Elemente aus A und alle Elemente aus B (und sonst keine weiteren Elemente) enthalten.

1.8.2 Notation

Das Symbol für die Vereinigungs-Operation erinnert an eine Schüssel, in die man die Inhalte der beiden Mengen kippt, um sie dort zu vereinigen. Das Symbol erinnert auch an den Buchstaben U, das ist der Anfangsbuchstabe des englischen Wortes »union«, welches »Vereinigung« bedeutet.

$$A \cup B = C$$

1.8.3 Beispiele



Linkes Bild: Die Menge A (dargestellt durch die nach links geneigte Ellipse) enthält Kreise, die Menge B (nach rechts geneigte Ellipse) enthält grüne Figuren.

Rechtes Bild: Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ enthält alle Figuren aus beiden Mengen, also alle Figuren, die kreisförmig **oder** grün sind. (Es ist kein Zufall, dass das Symbol für die logische Oder-Verknüpfung $\vee$ dem Vereinigungssymbol $\cup$ ähnlich sieht.) $A \cup B$ ist die kleinste (am wenigsten mächtige) Obermenge beider Mengen. Jede kleinere Menge wäre nicht zugleich Obermenge von A und Obermenge von B, und jede größere Obermenge von A und B würde Elemente enthalten, die weder in A noch in B enthalten sind.

Ein anderes Beispiel:

$$A := \{2, 4, 6, 8\}, \qquad B := \{1, 2, 3, 4\}$$
$$C := A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

Beachte, dass die Elemente, die sowohl in A als auch in B vorkommen (das sind in diesem Beispiel die Elemente 2 und 4), in C nicht doppelt, sondern jeweils nur einmal vorkommen! (Siehe 1.3.1 Definition von »Menge« auf Seite 7, Regel 2: Jedes Element, das in einer Menge enthalten ist, kommt dort nur einmal vor.)

1.8.4 Die Vereinigung zweier Mengen ist kommutativ und assoziativ

Kommutativ:

Kommutativgesetz: Abschnitt 5.1 auf Seite 54

$$A \cup B = B \cup A$$

Das ist unmittelbar einsichtig, wenn man sich die beiden gezeigten Beispiele ansieht, und es ist eine direkte Folge der Tatsache, dass die Elemente innerhalb einer Menge keine bestimmte Reihenfolge haben.

Assoziativ:

Assoziativgesetz: Abschnitt 5.2 auf Seite 55

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Wieder ein Beispiel:

$$A := \{a, b, c, d\}, \qquad B := \{a, b, e, f\}, \qquad C := \{a, c, e, g\}$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$\{a, b, c, d\} \cup (\{a, b, e, f\} \cup \{a, c, e, g\}) = (\{a, b, c, d\} \cup \{a, b, e, f\}) \cup \{a, c, e, g\}$$
$$\{a, b, c, d\} \cup \{a, b, c, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f\} \cup \{a, c, e, g\}$$
$$\{a, b, c, d, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

Wie schon mehrfach erwähnt, beweist ein einzelnes Beispiel nicht die generelle Aussage. Die generelle Aussage, nämlich die Gültigkeit des Assoziativgesetzes, folgt aber ebenfalls aus dem Fehlen einer Reihenfolge innerhalb der Mengen.

1.8.5 Der große Vereinigungs-Operator

Die bekanntesten großen Operatoren für kommutativ-assoziative Verknüpfungen sind der Summen-Operator $\sum$ für die Addition $a + b$ und der Produkt-Operator $\prod$ für die Multiplikation $a \cdot b$. Nachdem die Vereinigung zweier Mengen ebenfalls kommutativ-assoziativ ist, bietet es sich an, dafür ebenfalls einen »großen« Operator zu kreieren, und diesen großen Vereinigung-Operator gibt es wirklich:

$$\bigcup \{A, B, C, \cdots\}$$

Er kann gleich verwendet werden wie der Summen- und der Produkt-Operator (siehe Abschnitt 5.3 auf Seite 55):

$$\bigcup_{i=1}^{5} A_i$$

1.9 Schnittmenge (»Durchschnitt«)

1.9.1 Definition

Die Schnittmenge zweier Mengen ist die mächtigste Menge, die Teilmenge beider Mengen ist.

Andere Formulierung:

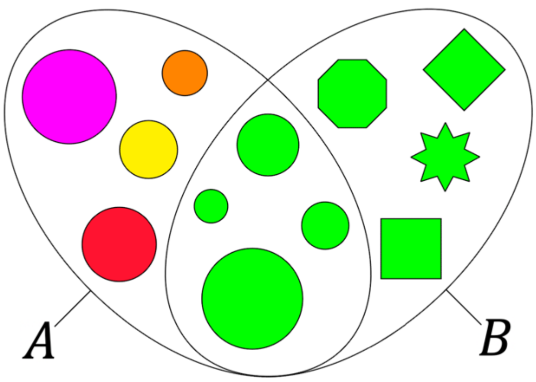
Wenn man die Schnittmenge der Mengen A und B bildet, sind im Ergebnis alle Elemente enthalten, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.

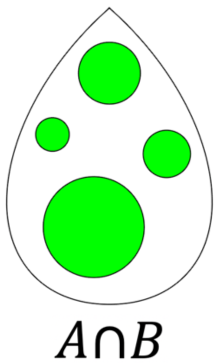
1.9.2 Notation

Das Symbol für die Schnittmengen-Operation ist das auf den Kopf gestellte Vereinigungs-Symbol

$$A \cap B = C$$

1.9.3 Beispiel





Linkes Bild: Die Menge A (nach links geneigte Ellipse) enthält Kreise, die Menge B (nach rechts geneigte Ellipse) enthält grüne Figuren.

Rechtes Bild: Die Durchschnittsmenge $A \cap B$ enthält nur Figuren, die in beiden Mengen vorkommen, also Figuren, die zugleich kreisförmig **und** grün sind. (Beachte auch hier die Ähnlichkeit zwischen dem logischen Und-Symbol $\land$ und dem Schnittmengen-Symbol $\cap$.)

$A \cap B$ ist die mächtigste Teilmenge beider Mengen. In jeder kleineren Teilmenge würden Elemente fehlen, die in beiden Mengen enthalten sind. Jede mächtigere Menge wäre keine Teilmenge von Menge A und von Menge B.
Ein anderes Beispiel:

$$A := \{2, 4, 6, 8\}, \qquad B := \{1, 2, 3, 4\}$$
$$C := A \cap B = \{2, 4\}$$

1.9.4 Die Schnittmengenbildung zweier Mengen ist kommutativ und assoziativ

Kommutativ:

Kommutativgesetz: Abschnitt 5.1 auf Seite 54

$$A \cap B = B \cap A$$

Auch hier ist die Kommutativität unmittelbar einsichtig, und eine direkte Folge der Tatsache, dass die Elemente innerhalb einer Menge keine bestimmte Reihenfolge haben.

Assoziativ:

Assoziativgesetz: Abschnitt 5.2 auf Seite 55

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Beispiel:

$$A := \{a, b, c, d\}, \qquad B := \{a, b, e, f\}, \qquad C := \{a, c, e, g\}$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$\{a, b, c, d\} \cap (\{a, b, e, f\} \cap \{a, c, e, g\}) = (\{a, b, c, d\} \cap \{a, b, e, f\}) \cap \{a, c, e, g\}$$
$$\{a, b, c, d\} \cap \{a, e\} = \{a, b\} \cap \{a, c, e, g\}$$
$$\{a\} = \{a\}$$

Die Gültigkeit des Assoziativgesetzes, folgt auch in diesem Fall aus dem Fehlen einer Reihenfolge innerhalb der Mengen.

1.9.5 Der große Schnittmengen-Operator

Nachdem die Schnittmengenbildung kommutativ-assoziativ ist, wird es nicht überraschen, dass es dafür ebenfalls einen »großen« Operator gibt, und auch das Aussehen des Operators ist erwartbar:

$$\bigcap \{A, B, C, \cdots\}$$
$$\bigcap_{i=0}^{7} A_i$$

1.9.6 Disjunkte Mengen

Man nennt zwei Mengen »disjunkt«, wenn es kein Element gibt, das in beiden Mengen vorkommt. Mit anderen Worten: Zwei Mengen sind disjunkt, wenn deren Schnittmenge leer ist:

$$\text{»}A \text{ und } B \text{ sind disjunkt«} \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset$$

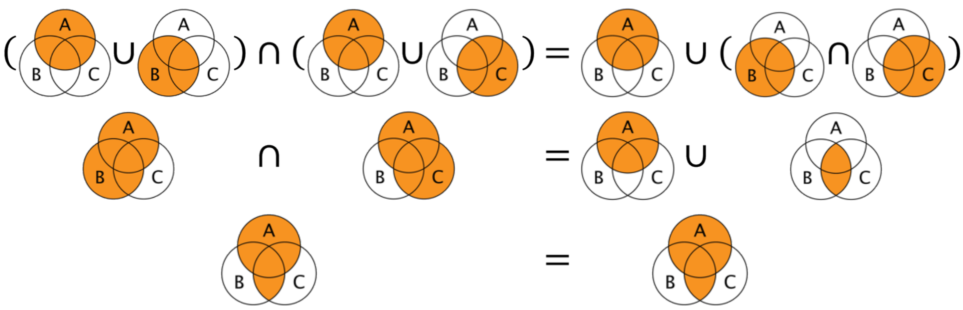
1.10 Für Vereinigung und Schnittmengenbildung gilt das Distributivgesetz

Wie im Anhang, im Abschnitt 5.4 auf Seite 57 gezeigt wird, gilt das Distributivgesetz für die Addition und Multiplikation, also für ein Paar von Operatoren, die in gewisser Weise miteinander verwandt sind. Also ist zu vermuten, dass dies auch für die beiden vorgestellten Mengenoperatoren der Fall sein könnte, und das ist tatsächlich so.

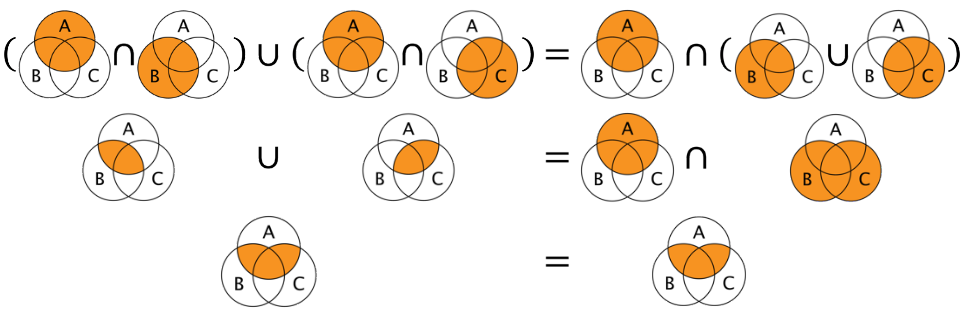
Es gibt aber einen wichtigen Unterschied: Im Fall von Addition und Multiplikation gilt das Distributivgesetz nur für $(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b + c)$, jedoch nicht, wenn man die Operatoren vertauscht. Im allgemeinen Fall gilt nämlich $(a + b) \cdot (a + c) \neq a + (b \cdot c)$. (Gleichheit gilt nur dann, wenn zufällig $a + b + c = 1$.)

Für die beiden Mengenoperatoren gelten aber beide Versionen uneingeschränkt, das wird hier mit Hilfe von Venn-Diagrammen dargestellt:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$$



$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$$



Beachte, dass die hier gezeigten Venn-Diagramme Darstellungen beliebiger Mengen sind, denn es wurde ja nirgendwo festgelegt, welche Elemente in den drei Mengen enthalten sein sollen. Mit anderen Worten: Das was hier gezeigt wurde, gilt für alle Mengen, und die hier gezeigten Ableitungen sind bereits vollständige Beweise für die beiden Ausprägungen des Distributivgesetzes für Vereinigung und Schnittmengenbildung bei Mengen.

Weil sowohl die Vereinigung als auch die Schnittmengenbildung kommutativ sind, muss auch nicht zwischen links-und rechtsdistributiv unterschieden werden (siehe 5.4 auf Seite 57).

1.11 **Differenzmenge**

1.11.1 **Definition**

Die Differenzmenge von A und B (Die Beachtung der Reihenfolge ist wichtig!) ist die Menge aller Elemente, die zwar in A enthalten sind, aber nicht in B.

Andere Formulierung:

Wenn man aus der Menge A alle Elemente entfernt, die auch in B enthalten sind, ist das, was am Ende noch von A übrigbleibt, die Differenzmenge von A und B.

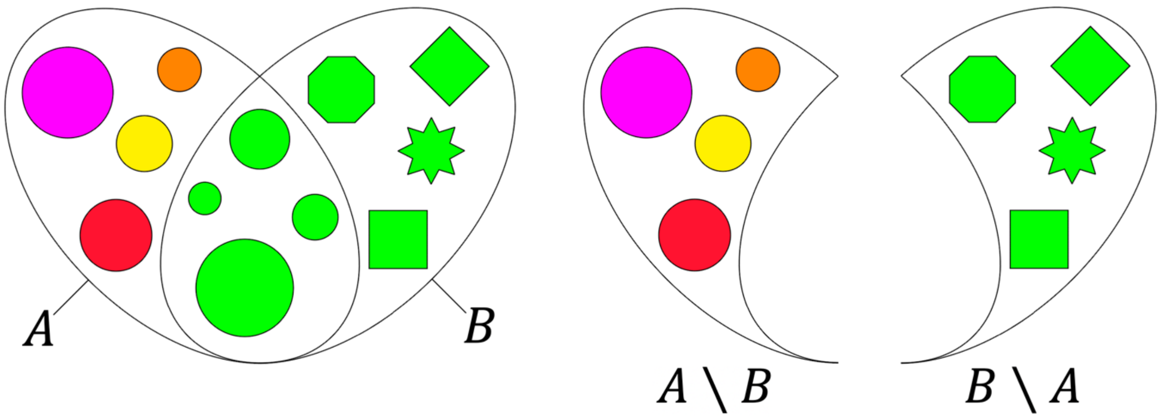
1.11.2 **Notation**

Das Symbol für die Differenzmengen-Operation ist ein nach hinten geneigter Schrägstrich:

$$A \setminus B = D$$

Sprich: »A ohne B ist D« oder »A minus B ist D«

1.11.3 **Beispiel**



Linkes Bild: Die Menge A (nach links geneigte Ellipse) enthält Kreise, die Menge B (nach rechts geneigte Ellipse) enthält grüne Figuren.

Mittleres Bild: Die Differenzmenge $A \setminus B$ enthält alle Figuren der Menge A, die nicht in der Menge B vorkomen. Das sind alle Kreise, die nicht grün sind.

Rechtes Bild: Die Differenzmenge $B \setminus A$ enthält alle Figuren der Menge B, die nicht in der Menge A vorkomen. Das sind alle grünen Figuren, die keine Kreise sind.

1.11.4 **Das Bilden der Differenzmenge ist weder kommutativ noch assoziativ**

Nicht kommutativ:

Dass die Differenzmengenbildung nicht kommutativ ist, erkannt man leicht am obenstehenden Beispiel (1.11.3), für das klar ersichtlich gilt: $A \setminus B \neq B \setminus A$. Die beiden Differenzmengen sind nur genau dann gleich, wenn A und B gleich sind, denn dann gilt:

$$A = B \quad \Rightarrow \quad A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$$

Denn in diesem Fall, entfernt man ja aus einer Menge alle Elemente, die in dieser Menge enthalten sind, und dann bleibt nur die leere Menge über.

Nicht assoziativ:

Auch hier genügt ein Gegenbeispiel, um zu beweisen, dass diese Eigenschaft nicht vorhanden ist:

$$A := \{a, b, c, d\}, \qquad B := \{a, b, e, f\}, \qquad C := \{a, c, e, g\}$$
$$A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$$
$$\{a, b, c, d\} \setminus (\{a, b, e, f\} \setminus \{a, c, e, g\}) \neq (\{a, b, c, d\} \setminus \{a, b, e, f\}) \setminus \{a, c, e, g\}$$
$$\{a, b, c, d\} \setminus \{b, f\} \neq \{c, d\} \setminus \{a, c, e, g\}$$
$$\{a, c, d\} \neq \{d\}$$

1.12 **Symmetrische Differenz**

1.12.1 **Definition**

Die symmetrische Differenz zweier Mengen A und B ist jene Menge, die alle Elemente enthält, die in genau einer der beiden Mengen vorkommen.

Andere Formulierung:
Man entfernt aus der Menge A alles was auch in B vorkommt, und aus der Menge B alles was es auch in A gibt. Die Vereinigung beider Restmengen ist die symmetrische Differenz von A und B.

$$\mathrm{SymDiff} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Dritte Formulierung:
Man bildet die Vereinigungsmenge V der Mengen A und B und auch die Schnittmenge S beider Mengen. Die Differenzmenge von V und S ist die symmetrische Differenz.

$$\mathrm{SymDiff} = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$$

1.12.2 **Notation**

Als Operatorsymbol für die symmetrische Differenz wird ein auf einer Seite stehendes gleichseitiges Dreieck verwendet: $\triangle$

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

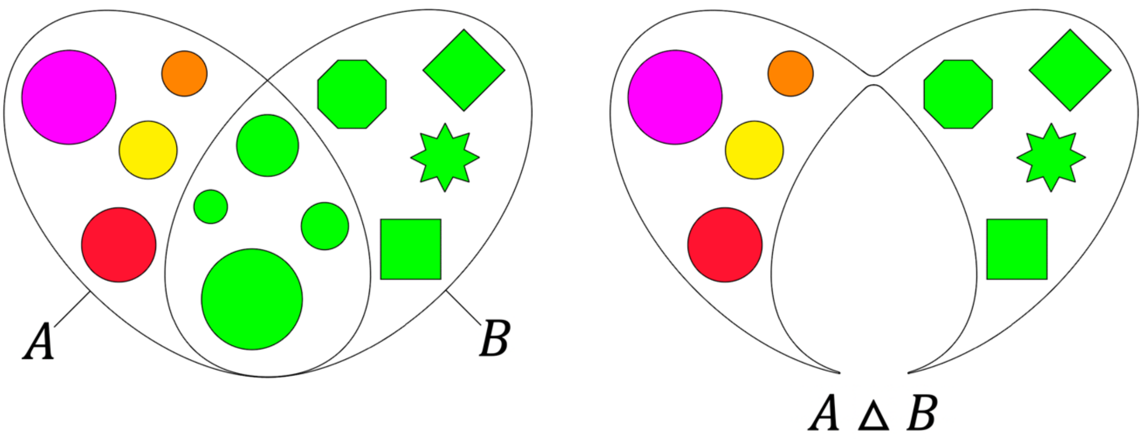
$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Sprich:

»Die symmetrische Differenz von A und B ist definiert als die Vereinigung von A ohne B mit B ohne A.«

»Die symmetrische Differenz von A und B ist definiert als die Vereinigungsmenge von A und B ohne die Schnittmenge von A und B.«

1.12.3 **Beispiel**



Linkes Bild: Die Menge A (nach links geneigte Ellipse) enthält Kreise, die Menge B (nach rechts geneigte Ellipse) enthält grüne Figuren.

Rechtes Bild: Die symmetrische Differenz von A und B enthält alle Elemente, die nur in genau einer der beiden Mengen (nicht aber in beiden zugleich) vorkommen. Das sind alle Figuren, die entweder kreisförmig oder grün sind, aber nicht beides zugleich.

1.12.4 **Die symmetrische Differenz ist kommutativ und assoziativ**

Kommutativ:

Dass die symmetrische Differenz kommutativ ist, ergibt sich aus der unter »dritte Formulierung« genannten Definition und daraus, dass das Bilden der Vereinigung und das Bilden des Durchschnitts symmetrisch sind. $A \cup B$ ergibt immer genau dasselbe wie $B \cup A$.

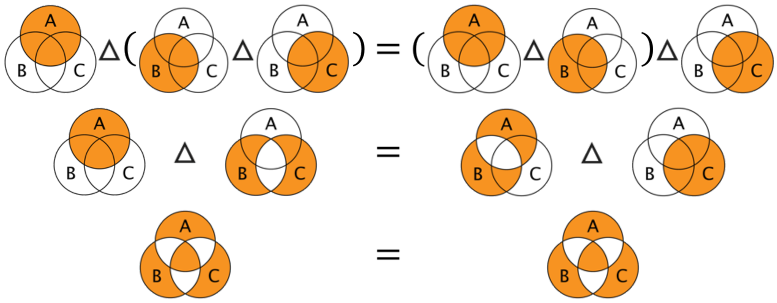
Ebenso liefern $A \cap B$ und $B \cap A$ immer das genau identische Ergebnis. Die Differenzmenge wird also sowohl bei $A \triangle B$ als auch bei $B \triangle A$ von genau denselben Mengen gebildet. Es gilt also immer:

$$A \triangle B = B \triangle A$$

Assoziativ:

Wieder erfolgt der Beweis anschaulich durch Venn-Diagramme

$$A \quad \triangle (\quad B \quad \triangle \quad C \quad) = (\quad A \quad \triangle \quad B \quad) \triangle \quad C$$



Großes Operatorsymbol?

Nachdem die symmetrische Differenz sowohl kommutativ als auch assoziativ ist, könnte man für die Bildung der symmetrischen Differenz von mehreren Mengen auch ein großes Operatorsymbol definieren, vergleichbar mit den Symbolen $\sum_{i=1}^{n} M_i$, $\prod_{i=1}^{n} M_i$, $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ und $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$, aber im Fall der symmetrischen Differenz existiert kein allgemein anerkanntes Symbol dafür. Der Grund dafür dürfte vermutlich sein, dass es selten die Notwendigkeit gibt, von einer größeren Zahl von Mengen die symmetrische Differenz zu bilden. Naheliegend wäre natürlich, dafür ein großes Dreieck zu verwenden.

1.13 **Komplement, Komplementärmenge**

1.13.1 **Definition**

Das Komplement einer Menge A existiert nur, wenn auch eine Grundmenge G definiert ist, die eine Obermenge von A ist ($G \supseteq A$), was natürlich bedeutet, dass A eine Teilmenge von G ist ($A \subseteq G$). Mit anderen Worten: Es gibt in A nur Elemente, die auch in G vorkommen.

Wenn so eine Grundmenge definiert ist, ist das Komplement von A nichts anderes als die Differenzmenge von G und A.

1.13.2 **Notation**

Die Komplementärmenge wird einfach durch ein großes hochgestelltes C angezeigt:

$$A^{\mathsf{C}}$$

Das setzt aber voraus, dass klar ist, welche Menge als Grundmenge anzusehen ist. Wenn man die Grundmenge auch explizit angeben will, kann man sie als Index anfügen, oder gleich die Schreibweise für Differenzmengen verwenden, was auch der üblichere Weg ist:

$$A^{\complement_G} = G \setminus A$$

1.13.3 **Beispiel**

Die Grundmenge sei die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, außerdem ist noch die Menge der geraden natürlichen Zahlen gegeben: $\mathbb{G} = \{0, 2, 4, 6, \cdots\}$[1]. Dann ist das Komplement von $\mathbb{G}$ die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{G}^{\complement} = \mathbb{G}^{\complement_{\mathbb{N}}} = \mathbb{N} \setminus \mathbb{G} = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$$

1.13.4 **Wichtige Zusammenhänge (Überleitung zu den Partitionen)**

Es ist zwar offensichtlich, und ergibt sich direkt aus der Definition, soll aber dennoch erwähnt werden:

Das Komplement einer Menge ist immer eine Teilmenge der Grundmenge

$$\mathrm{K} = G \setminus A \quad \Rightarrow \quad K \subseteq G$$

Für die Menge A war bereits in der Definition gefordert, dass sie eine Teilmenge der Grundmenge ist:

$$A \subseteq G$$

Für A und K gelten auch die beiden folgenden Zusammenhänge, die ganz einfach aus der Definition des Komplements abzuleiten sind:

- Die Vereinigungsmenge einer Menge mit ihrem Komplement ergibt immer genau die Grundmenge
$$A \cup K = G$$
- Die Schnittmenge einer Menge mit ihrem Komplement ist immer die leere Menge, die beiden Mengen sind also disjunkt.
$$A \cap K = \emptyset$$

[1] Das Doppelstrich-Symbol $\mathbb{G}$ wird in deutschsprachigen Texten häufig für die Menge der geraden Zahlen verwendet, es gehört aber nicht zu den internationalen Standard-Symbolen für bestimmte Mengen (das sind z.B. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$). Mit $\mathbb{G}$ können auch zwei verschiedene Zahlenmengen gemeint sein: Einerseits, so wie hier, die geraden natürlichen Zahlen, andererseits aber auch die geraden ganzen Zahlen, zu denen auch die negativen geraden Zahlen gehören.

1.14 **Partitionen**

Wenn die Vereinigung zweier Mengen A und B, die noch dazu disjunkt sind ($A \cap B = \emptyset$), genau eine bestimmte Grundmenge G ergibt ($A \cup B = G$), gehört ja jedes Element von G zu genau einer der beiden Mengen A und B. (Kein Element von G gehört zu beiden Mengen und kein Element von G fehlt in beiden Mengen.) Man sagt dann, dass A und B die Menge G partitionieren, bzw. dass A und B gemeinsam eine Partition der Menge G sind. Dieses Konzept kann man auf beliebig viele Teilmengen erweitern.

1.14.1 **Definition**

Wenn alle Elemente einer Grundmenge $\boldsymbol{G}$ so auf mehrere Teilmengen $\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}$ usw. von $\boldsymbol{G}$ aufgeteilt sind, dass sich jedes einzelne Element von $\boldsymbol{G}$ in genau einer dieser Teilmengen befindet, dann sind diese Teilmengen gemeinsam eine Partition von $\boldsymbol{G}$. Die Teilmengen partitionieren $\boldsymbol{G}$. Die Menge dieser Teilmengen $\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}$ usw. ist eine Partition von $\boldsymbol{G}$.

Andere Formulierung:

Wenn man bestimmte Mengen $T_1, T_2, T_3, \cdots, T_n$ hat und jedes Paar, das man aus 2 dieser Mengen bilden kann, disjunkt ist (wenn also die Schnittmenge von jedem Paar die leere Menge ist), und wenn die Vereinigungsmenge all dieser Mengen genau die Grundmenge G ergibt, dann ist die Menge dieser Teilmengen von G eine Partition von G.

Bedingung 1: Die Mengen sind paarweise disjunkt

$$T_i \cap T_j = \emptyset \text{ für alle } i \text{ und } j\text{, wenn } i \neq j$$

Bedingung 2: Die Vereinigung aller Mengen ergibt die Grundmenge

$$\bigcup_{i=1}^{n} T_i = G$$

Schlussfolgerung:

Die Menge aller T_i, also $P = \{T_1, T_2, T_3, \cdots, T_n\}$, ist eine Partition von G.

Klarstellung:

Es wurde bisher immer davon geredet, dass es sich um mehrere Teilmengen handelt, die gemeinsam eine Partition bilden. Es sei hier aber ausdrücklich festgehalten, dass jede Menge auch eine Partition hat, die aus nur einer einzelnen Teilmenge besteht, welche gleich der Grundmenge ist. Wenn also G die Grundmenge ist, ist die Menge, die die Menge G enthält (und sonst keine weiteren Elemente hat), also $\{G\}$, ebenfalls eine Partition von G.

Für Partitionen gibt es keine spezielle Notation.

1.14.2 Beispiel

- Die Menge R_0 aller natürlichen Zahlen, die bei Division mit Rest durch 3 keinen Rest (bzw. den Rest 0) ergeben, und ...
- ... die Menge R_1 aller natürlichen Zahlen, die bei Division mit Rest durch 3 den Rest 1 ergeben, und ...
- ... die Menge R_2 aller natürlichen Zahlen, die bei Division mit Rest durch 3 den Rest 2 ergeben, ...

... bilden gemeinsam eine Partition der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:

$$R_0 = \{0, 3, 6, 9, 12, \cdots\}$$

$$R_1 = \{1, 4, 7, 10, 13, \cdots\}$$

$$R_2 = \{2, 5, 8, 11, 14, \cdots\}$$

$\{R_0, R_1, R_2\}$ ist eine Partition von $\mathbb{N}$ weil

$$R_0 \cap R_1 = \emptyset \quad \wedge \quad R_0 \cap R_2 = \emptyset \quad \wedge \quad R_1 \cap R_1 = \emptyset \quad \wedge \quad R_0 \cup R_1 \cup R_2 = \mathbb{N}$$

1.15 Kartesisches Produkt zweier Mengen

1.15.1 Definition

Das kartesische[2] Produkt der Mengen A und B ist die Menge aller Paare[3], die man aus jeweils einem Element der Menge A und einem Element der Menge B bilden kann, wobei das erste Element jedes Paares immer ein Element aus der Menge A ist, und das zweite Element jedes Paares immer aus der Menge B stammt.

Andere Formulierung:

Man erzeugt ein zweidimensionales Raster. Am linken Rand positioniert man alle Elemente der Menge A, am oberen Rand alle Elemente der Menge B.

A \ B	🍎	🍐	🍋
👶	(👶, 🍎)	(👶, 🍐)	(👶, 🍋)
👩	(👩, 🍎)	(👩, 🍐)	(👩, 🍋)
👴	(👴, 🍎)	(👴, 🍐)	(👴, 🍋)

---

[2] Das Adjektiv »kartesisch« ist vom Nachnamen des französischen Mathematikers René Descartes (1596-1650) abgeleitet. Descartes erfand dieses Mengenprodukt, um damit das ebenfalls nach ihm benannte kartesische Koordinatensystem beschreiben zu können, womit er das mathematische Teilgebiet der analytischen Geometrie begründete.

[3] Zur Erinnerung: Ein Paar ist ein 2-Tupel, also eine geordnete Menge mit 2 Elementen. »Geordnet« heißt: Die Reihenfolge der Elemente ist wichtig; $(1, 2)$ und $(2,1)$ sind zwei verschiedene Paare.

Das Raster füllt man dann mit Paaren, wobei das erste Element jedes Paares jenes Element ist, das am linken Rand steht, und das zweite Element ist jenes Element, das am oberen Rand steht.

1.15.2 **Notation**

Das Operatorsymbol für das kartesische Produkt ist ein liegendes Kreuz mit vier gleich langen Armen.

$$A \times B$$

1.15.3 **Beispiel**

Ein Beispiel wurde bereits in der Definition angegeben, hier ist dasselbe Beispiel in der üblichen Schreibweise:

$$A = \{\text{👶}, \text{👩}, \text{👴}\}$$
$$B = \{\text{🍎}, \text{🍐}, \text{🍋}\}$$
$$A \times B = \{(\text{👶}, \text{🍎}), (\text{👶}, \text{🍐}), (\text{👶}, \text{🍋}), (\text{👩}, \text{🍎}), (\text{👩}, \text{🍐}), (\text{👩}, \text{🍋}), (\text{👴}, \text{🍎}), (\text{👴}, \text{🍐}), (\text{👴}, \text{🍋})\}$$

1.15.4 **Kartesisches Produkt einer Menge mit sich selbst**

Manchmal kommt es auch vor, dass das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst gebildet wird:

$$C = \{\text{⓪}, \text{❶}\}$$
$$C \times C = \{(\text{⓪}, \text{⓪}), (\text{⓪}, \text{❶}), (\text{❶}, \text{⓪}), (\text{❶}, \text{❶})\}$$

Man verwendet dafür häufig diese vereinfachte Schreibweise:

$$C^2 := C \times C$$

1.15.5 **Das kartesische Produkt ist weder kommutativ noch assoziativ**

Nicht kommutativ:

Das soll anhand eines Gegenbeispiels gezeigt werden:

$$A = \{1, 2, 3\}; \quad B = \{a, b\}$$
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$
$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

Jedes Element in $A \times B$ ist ein Paar, dessen erstes Element eine Zahl ist. In $B \times A$ steht an der ersten Stelle jedes Paares aber ein Buchstabe. Daher ist kein Element von $A \times B$ mit irgendeinem Element von $B \times A$ identisch. Daher gilt in diesem Beispiel:

$$A \times B \neq B \times A$$

Bereits durch dieses eine Beispiel ist bewiesen, dass $A \times B$ und $B \times A$ nicht immer identisch sind, was gleichbedeutend mit der Aussage ist, dass die Bildung des kartesischen Produkts nicht kommutativ ist.

Allerdings gibt es zwischen den beiden Produkten immer eine kanonische bijektive Abbildung, mit der das eine Produkt umkehrbar eindeutig auf das andere abgebildet werden kann. Dazu muss man lediglich bei jedem Paar die Reihenfolge der beiden Elemente vertauschen.

Nicht assoziativ:

Auch hier genügt ein sehr kurzes Gegenbeispiel, um zu beweisen, dass die Eigenschaft nicht vorhanden ist:

$$A := \{a\}, \qquad B := \{b\}, \qquad C := \{c\}$$
$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$
$$\{a\} \times (\{b\} \times \{c\}) \neq (\{a\} \times \{b\}) \times \{c\}$$
$$\{a\} \times \{(b, c)\} \neq \{(a, b)\} \times \{c\}$$
$$\{(a, (b, c))\} \neq \{((a, b), c)\}$$

In beiden Fällen entsteht eine Menge mit nur einem Element, welches ein Paar ist.

- Im Fall von $A \times (B \times C)$ ist das das Paar $(a, (b, c))$, dessen erstes Element der Buchstabe a ist.
- Im Fall von $(A \times B) \times C$ entsteht das Paar $((a, b), c)$, dessen erstes Element kein Buchstabe, sondern das Paar (a, b) ist.

Die beiden Paare, die hier entstehen, sind also unterschiedlich, daher sind auch die Mengen, die diese Paare enthalten, nicht gleich. Das gezeigte Beispiel belegt also, dass das kartesische Produkt nicht assoziativ ist.

Aber auch hier gibt es eine kanonische bijektive Abbildung, die ein Ergebnis in das andere überführt. Dazu muss man nur die Klammern anders setzen.

1.16 Das kartesische Produkt mehrerer Mengen

Es wurde soeben gezeigt, dass der Ausdruck $A \times B \times C$ wegen der nicht vorhandenen Assoziativität nicht eindeutig definiert ist. Man kann diesen Ausdruck als $A \times (B \times C)$ oder auch als $(A \times B) \times C$ deuten. Anstatt sich per Konvention auf eine dieser beiden Möglichkeiten festzulegen, wählt man (ebenfalls per Konvention) eine dritte Variante, die in den meisten Fällen auch dem entspricht, was man intuitiv unter einem Mengenprodukt versteht.

Nehmen wir wieder die drei Mengen aus dem letzten Beispiel:

$$A := \{a\}, \qquad B := \{b\}, \qquad C := \{c\}$$

Man vereinbart diese Variante:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c)\}$$

1.16.1 Definition

Das kartesische Produkt dreier Mengen ist eine Menge, deren Elemente Tripel sind. Ganz allgemein gilt, dass bei der Verknüpfung von n Mengen zu einem kartesischen Produkt eine Menge entsteht, deren Elemente n-Tupel sind. Jedes Element des Produkts enthält aus jeder der Faktor-Mengen jeweils genau 1 Element. Die Elemente treten in den Tupeln in genau derselben Reihenfolge auf, in der auch die Faktor-Mengen in die Verknüpfung eingehen.

Das kartesische Produkt von n Mengen ist also nicht als das $(n-1)$-fache Ausführen einer zweistelligen Verknüpfung definiert, sondern ist eine einzige n-stellige Verknüpfung, deren Ergebnis eine Menge ist, die aus lauter n-Tupeln besteht.

1.16.2 Beispiel

$$A := \{a, b, c\}, \qquad B := \{\$, €\}, \qquad C := \{0, 1\}$$

$$A \times B \times C = \begin{Bmatrix} (a,\$,0), (a,\$,1), (a,€,0), (a,€,1), \\ (b,\$,0), (b,\$,1), (b,€,0), (b,€,1), \\ (c,\$,0), (c,\$,1), (c,€,0), (c,€,1) \end{Bmatrix}$$

In diesem Sinn kann man auch die vereinfachte Schreibweise für das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst auf das mehrfache kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst ausweiten:

$$M^2 = M \times M$$
$$M^3 = M \times M \times M$$
$$M^4 = M \times M \times M \times M$$

Ganz allgemein:

$$M^n = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n-\text{mal}}$$

Achtung!

Obwohl die Schreibweise M^n Ähnlichkeiten mit dem Potenzieren von Zahlen hat, handelt es sich bei M^n nicht um eine Potenzmenge! Potenzmengen wurden im Kapitel 1.7 ab Seite 19 behandelt und sind etwas ganz anderes. M^n ist das n-fache kartesische Produkt der Menge M mit sich selbst.

2 Relationen und Funktionen

Relationen und Funktionen sind Mengen (nämlich Teilmengen von kartesischen Produkten), könnten also als Teil des Abschnitts 1 abgehandelt werden. Weil sie aber besondere Eigenschaften haben, ist es gerechtfertigt, ihnen einen eigenen Abschnitt zu widmen.

2.1 Relationen

2.1.1 Definition

Eine Relation ist eine Teilmenge eines kartesischen Produkts.

Eine zweistellige Relation R zwischen den Mengen A und B ist eine Teilmenge eines kartesischen Produkts dieser beiden Mengen A und B.

Ganz allgemein: Jede Teilmenge eines kartesischen Produkts von n Mengen wird als n-äre Relation bezeichnet.

$$R \subseteq A \times B$$

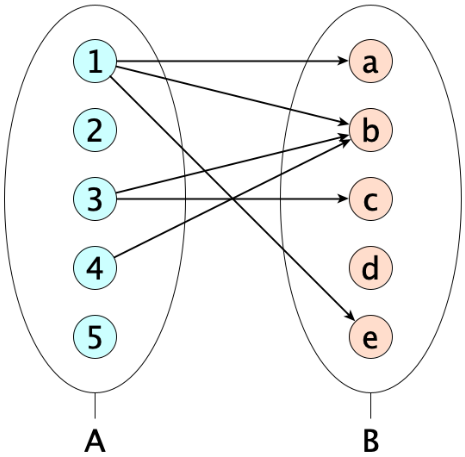
2.1.2 Beispiel

A \ B	🍎	🍐	🍋
👶	(👶, 🍎)	(👶, 🍐)	
👩		(👩, 🍐)	
👴	(👴, 🍎)		(👴, 🍋)

R = {(👶, 🍎), (👶, 🍐), (👩, 🍐), (👴, 🍎), (👴, 🍋)}

In einer semantischen Interpretation könnten wir diese Beziehung verwenden, um zu beschreiben, wer von diesen 3 Personen welche der 3 Früchte mag. Diese Teilmenge beschreibt also eine Beziehung zwischen den Mitgliedern der beiden Mengen. Daher kommt auch der Name "Relation".

In einer Relation werden Elemente einer Quellmenge (im obigen Beispiel die Menschen) Elementen einer Zielmenge (hier: Früchte) zugewiesen. Dadurch entstehen Paare, bei denen das erste Element ein Element aus der Quellmenge und das zweite Element ein Element aus der Zielmenge ist. Diese Paare können zu einer neuen Menge kombiniert werden, und diese aus Paaren bestehende Menge wird als »Relation« bezeichnet. Eine Relation ist also eine Teilmenge des Kreuzprodukts, das aus der Quell- und der Zielmenge gebildet werden kann.



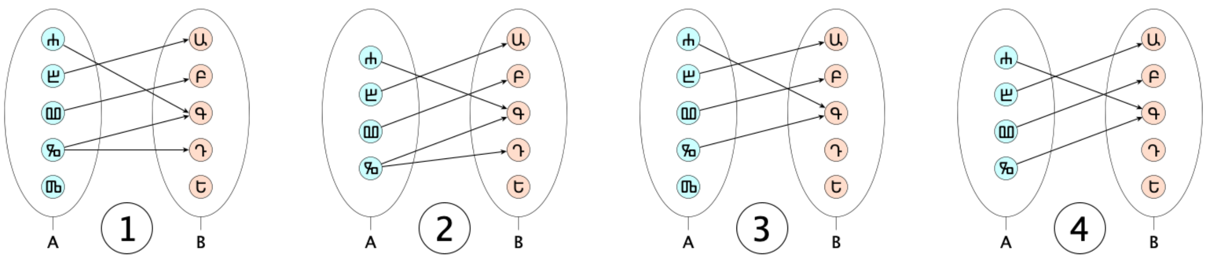
Die hier dargestellte Realtion ist eine Teilmenge des Kreuzprodukts $A \times B$ und besteht aus diesen Paaren:

$$A \rightarrow B = \{(1,a),(1,b),(1,e),(3,b),(3,c),(4,b)\}$$

In der Abbildung wird jedes Paar durch einen Pfeil dargestellt, der mit dem linken Element des Paares beginnt und am entsprechenden rechten Element des Paares endet.

2.2 **Funktionen**

Eine Funktion ist eine Relation, in der jedes Element der Ausgangsmenge genau einmal als erstes Element in den Paaren der Relation vorkommt. Mit anderen Worten: In einer Funktion geht genau 1 Pfeil von jedem Element der Ausgangsmenge aus.



Von den vier hier gezeigten Beziehungen ist nur Nummer 4 eine Funktion. In den Relationen 1 und 2 gibt es Elemente in der Ausgangsmenge, von denen 2 Pfeile ausgehen. Bei 1 und 3 gibt es Elemente in der Ausgangsmenge, von denen überhaupt keine Pfeile ausgehen. In beiden Fällen (mehr als 1; weniger als 1) führt dies dazu, dass die Beziehung keine Funktion sein kann.

2.2.1 **Partielle Funktionen**

Eine partielle Funktion ist eine Relation, bei der jedes Element der Ausgangsmenge höchstens einmal als erstes Element in den Paaren der Relation vorkommt, und bei der es mindestens ein Element der Ausgangsmenge gibt, das in keinem Paar als erstes Element vorkommt. Mit anderen Worten: In einer partielle Funktion geht von jedem Element der Quellmenge höchstens 1 Pfeil aus und es gibt mindestens ein Element, von dem überhaupt kein Pfeil ausgeht.

Von den vier oben gezeigten Relationen ist nur die Nummer 3 eine partielle Funktion. In den Relationen 1 und 2 gibt es Elemente in der Ausgangsmenge, von denen 2 Pfeile ausgehen, dies widerspricht der Definition. In Nummer 4 gibt es kein Element in A, von dem kein Pfeil ausgeht, auch das widerspricht der Definition.

Sehr oft wird bei partielle Funktionen verlangt, dass es mindestens ein Element in A gibt, das mit einem Element in B verbunden ist (sonst wäre die Relation die leere Menge), oder es wird verlangt, dass die Elemente, von denen kein Pfeil ausgeht, nur seltene Ausnahmen innerhalb der Ausgangsmenge sind, dass also von der überwiegenden Mehrheit der Elemente von A jeweils ein Pfeil ausgeht. Dies wird aber in der Regel nicht explizit gesagt, sondern kann nur aus dem Kontext erschlossen werden.

Sehr häufig wird man auch feststellen, dass nicht immer streng zwischen Funktionen und partielle Funktionen unterschieden wird. Oft werden partielle Funktionen, bei denen nur sehr wenige Elemente aus der Quellmenge kein Abbild in der Zielmenge haben, wie »echte« Funktionen behandelt, die in diesem Zusammenhang »totale« Funktionen genannt werden.

Ein Beispiel für eine partielle Funktion ist die Abbildung der reellen Zahlen auf sich selbst, wobei die Elemente der Zielmenge die Kehrwerte der Elemente der Quellmenge sind: (Erläuterung dieser Notation im nächsten Abschnitt)

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Für $x = 0$ in der Quellmenge gibt es keinen Wert in der Zielmenge. Bei dieser Beziehung handelt es sich also nicht um eine (totale) Funktion, sondern um eine partielle Funktion. Dennoch wird sie sehr oft als »Funktion« behandelt. Man kann aber immer partielle Funktionen in totale Funktionen umwandeln, indem man die Ausgangsmenge neu definiert. Man schließt einfach alle Elemente, die kein Abbild in der Zielmenge haben, aus der ursprünglichen Ausgangsmenge aus. Dann hat jedes Element der neuen Quellmenge eine Abbildung, und schon hat man eine totale Funktion.

$$f: \quad \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

2.2.2 Signatur einer Funktion

Was wir bisher als »Quellmenge« und »Zielmenge« bezeichnet haben, ist auch bekannt als:

- Domäne = das, was wir bisher als »Quellmenge« bezeichnet haben
- Codomäne = die »Zielmenge«

Und die Notation

$$f: \quad A \to B, \qquad x \longmapsto y$$

wird als Signatur der Funktion bezeichnet und bedeutet, dass f eine Funktion von der Domäne A zur Codomäne B ist, wobei $x \in A$ und $y \in B$. Wenn $x \notin A$ ist, ist die Funktion f für x nicht definiert.

Die Notation

$$y = f(x)$$

macht ebenfalls deutlich, dass $x \in A$ und $y \in B$ ist, jedoch ohne die beiden Mengen A und B explizit zu nennen.

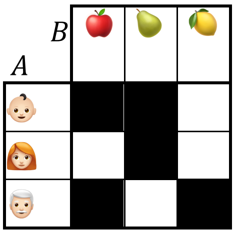
2.3 Funktionsgraphen

Die Darstellung mit den Pfeilen, die von einem Element der Quellmenge zu einem Element der Zielmenge zeigen, ist nur eine Möglichkeit Relationen und Funktionen darzustellen. Wesentlich häufiger sieht man, vor allem bei Funktionen, eine andere Darstellung, die hier hergeleitet werden soll.

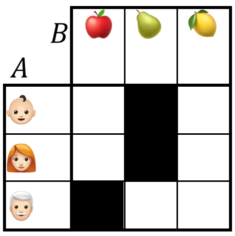
Erinnern Sie sich an diese Darstellung einer Relation:

A \ B	🍎	🍐	🍋
👶	(👶, 🍎)	(👶, 🍐)	
👩‍🦰		(👩‍🦰, 🍐)	
👴	(👴, 🍎)		(👴, 🍋)

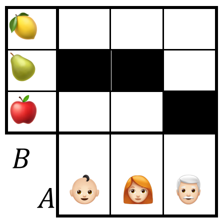
Welches Paar in einer Zelle stehen muss, ergibt sich automatisch aus seiner Position. Interessant bei einer Relation ist also eigentlich nur, ob eine Zelle mit einem Paar besetzt ist, oder ob sie leer ist. Es genügt also, die Zellen einzufärben. Schwarz soll bedeuten: An dieser Stelle befindet sich ein Paar das zur Relation gehört, weiß bedeutet: Das Paar, das an dieser Stelle stehen könnte, gehört nicht zur Relation. Wir erhalten dann dieses Bild:



Eine Relation ist genau dann eine Funktion, wenn es zu jedem Element der Quellmenge (hier ist das die Menge A) genau ein Paar in der Relation gibt. Mit anderen Worten: Bei einer Funktion ist in dieser Abbildung in jeder Zeile genau eine Zelle schwarz, alle anderen sind weiß. Das könnte beispielsweise so aussehen:

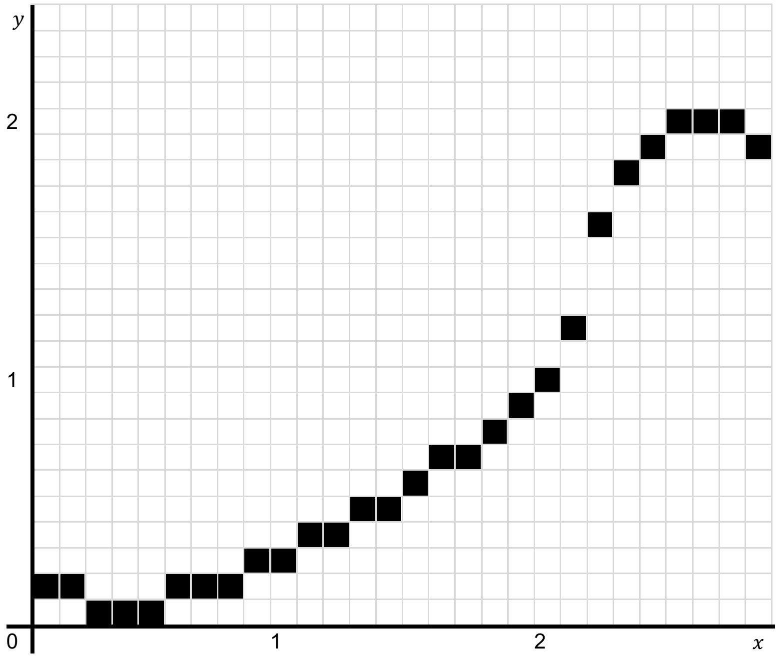


Nun drehen wir dieses Bild um 90° gegen den Urzeigersinn:

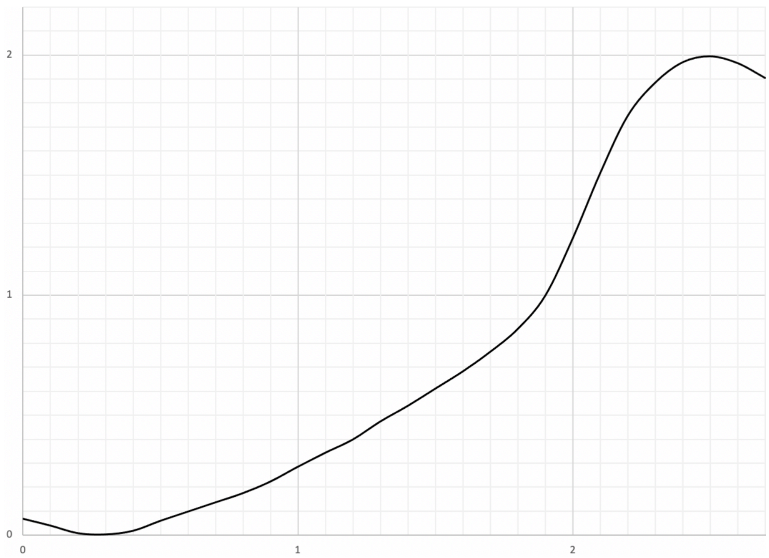


Beachte, dass das, was vorher eine Zeile war, durch die Drehung um 90° zu einer Spalte wurde. Eine Funktion ist in dieser gedrehten Darstellung dadurch charakterisiert, dass es pro Spalte genau einen schwarzen Klecks gibt.

Wenn die beiden Mengen nicht aus Gesichtern und Obstsorten sondern aus Zahlen bestehen, und wenn diese Mengen mehr als nur je drei Elemente enthalten, und wenn man die Beschriftung ein wenig ändert, könnte das dann so aussehen:



Wenn man als letzte Transformation von diskreten Mengen zu stetigen Mengen mit unendlich vielen Elementen in jedem noch so kleinen Intervall übergeht, nimmt der Graph der Funktion endlich die Form an, die man gewohnt ist:



Der Funktionsgraph sollte dabei eigentlich eine Linie der Dicke 0 sein. Weil man den Graph dann aber nicht sehen würde, wählt man eine praktikablere Dicke, verständigt sich aber darauf, dass der wahre Funktionswert immer genau in der Mitte des Strichs liegt.

2.4 Beispiele für Funktionen

Nachfolger (successor)

$$succ\colon \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \qquad x \longmapsto x + 1$$

Das heißt, wenn Sie $y = succ(x)$ berechnen, erhalten Sie die natürliche Zahl y, die auf die natürliche Zahl x folgt. Sie berechnen also $y = x + 1$ innerhalb der Menge der natürlichen Zahlen.

Quadrat (square)

$$sq\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto x^2$$

Das heißt, wenn man $y = sq(x)$ berechnet, erhält man die reelle Zahl y, die das Quadrat der reellen Zahl x ist. Man berechnet also $y = x^2$ innerhalb der Menge der reellen Zahlen.

Beachten Sie, dass in diesem Fall die Codomäne Elemente enthält, die niemals das Ergebnis dieser Funktion sein können. Das Quadrat einer reellen Zahl wird nie eine negative Zahl sein. Man könnte also die Codomäne auch anders definieren:

$$sq\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \qquad x \longmapsto x^2$$

Dies ist immer noch eine totale Funktion, wie die ursprüngliche quadratische Funktion. Aber das

$$sq\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \qquad x \longmapsto x^2$$

ist keine totale Funktion mehr! Es handelt sich um eine partielle Funktion, denn es gibt keinen Wert in der Codomäne, der die gültige Abbildung von $x = 0$ aus der Domäne sein kann.

Fakultät (factorial)

$$fact\colon \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \qquad x \longmapsto \prod_{i=1}^{x} i$$

Wenn man $y = fact(x)$ berechnet, erhält man das Produkt aller Zahlen von 1 bis x.

Geschlecht (gender)

$$gen\colon \mathrm{Personen} \rightarrow \{♀, ♂, \times\}$$

Diese Funktion ordnet einer Person ein biologisches Geschlecht zu. Es kann weiblich, männlich oder divers sein. Beachten Sie, dass wir hier keine geschlossene Formel zur »Berechnung« des Geschlechts haben. Diese Funktion ist nur als eine bestimmte Teilmenge des kartesischen Produkts aus der Menge der Personen und der Menge der Geschlechter definiert. Sie ist aber dennoch eine gültige totale Funktion.

Mutter (mother)

$$mother\colon \mathrm{Personen} \rightarrow Frauen$$

Wir definieren nun $\mathrm{Personen}$ als die Menge aller Personen, die in einer bestimmten Stadt leben, und wir haben eine Teilmenge dieser Menge: Die Menge aller weiblichen Personen, die in dieser Stadt leben, und wir nennen diese Menge $Frauen$.

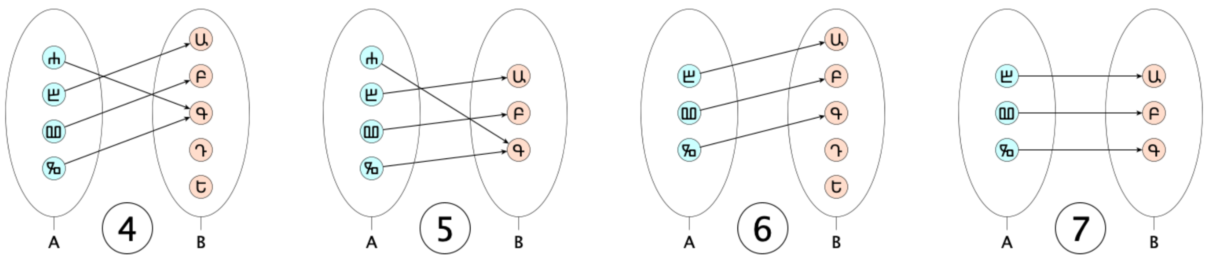
$$Frauen \subseteq \mathrm{Personen}$$

Diese Funktion ordnet jeder Person in dieser Stadt ihre Mutter zu, aber nur, wenn diese Mutter auch in der gleichen Stadt lebt. Wenn also die Mutter einer bestimmten Person an einem anderen Ort lebt oder wenn sie gestorben ist, dann ist der Wert von $mother(\mathrm{P})$ (mit $P \in \mathrm{Personen}$) nicht definiert. Es handelt sich also wieder um eine partielle Funktion.

2.5 Injektiv, surjektiv, bijektiv

2.5.1 Injektive Funktionen

Eine Funktion ist injektiv, wenn jedes Element der Zielmenge **höchstens** einmal als rechtes Element eines Paares in der Abbildung vorkommt. Mit anderen Worten, eine Funktion ist injektiv, wenn bei jedem Element der Zielmenge **höchstens** ein Pfeilende liegt. Das bedeutet auch, dass es für jedes Element y der Codomäne der Funktion **höchstens** ein Paar $(x, y) \in f$ gibt.



Die Funktionen 4 und 5 sind nicht injektiv, da es in B Elemente gibt, bei denen 2 Pfeile enden. Die Funktionen 6 und 7 hingegen sind injektiv. Bei jedem Element von B endet höchstens 1 Pfeil.

2.5.2 Surjektive Funktionen

Eine Funktion ist surjektiv, wenn jedes Element der Zielmenge **mindestens** einmal als rechtes Element eines Paares in der Abbildung vorkommt. Mit anderen Worten: Eine Funktion ist surjektiv, wenn bei jedem Element der Zielmenge **mindestens** ein Pfeilende liegt (gerne auch mehrere). Das bedeutet auch, dass es für jedes Element y der Codomäne der Funktion **mindestens** ein Paar $(x, y) \in f$ gibt.

Die Funktionen 4 und 6 aus der obigen Abbildung sind nicht surjektiv, da es Elemente in B gibt, bei denen kein Pfeil endet. Die Funktionen 5 und 7 hingegen sind surjektiv. Mindestens 1 Pfeil endet an jedem Element von B (manchmal auch mehr, aber das spielt keine Rolle).

2.5.3 Bijektive Funktionen

Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Eine Funktion ist also bijektiv, wenn jedes Element der Zielmenge **genau** einmal als rechtes Element eines Paares in der Abbildung vorkommt. Mit anderen Worten, eine Funktion ist bijektiv, wenn bei jedem Element der Zielmenge **genau** ein Pfeilende liegt. Das bedeutet auch, dass es für jedes Element y der Codomäne der Funktion **genau** ein Paar $(x, y) \in f$ gibt.

Die Funktionen 4 und 5 sind nicht bijektiv, weil sie nicht injektiv sind. Die Funktionen 4 und 6 sind nicht bijektiv, weil sie nicht surjektiv sind. Von den hier gezeigten Funktionen ist nur die Funktion 7 sowohl injektiv als auch surjektiv und damit die einzige, die bijektiv ist. An jedem Element endet genau 1 Pfeil.

Nach der Definition des Begriffs »Funktion« geht von jedem Element der Ausgangsmenge genau 1 Pfeil aus. Für eine Funktion gibt es also genau so viele Pfeile, wie es Elemente in der Ausgangsmenge gibt. Die Bijektivität verlangt nun, dass jedes Element der Zielmenge von genau einem Pfeil getroffen wird. Dies ist nur dann möglich, wenn die Zielmenge die gleiche Anzahl von Elementen hat wie Pfeile. Daraus folgt, dass die Quellmenge und die Zielmenge genau die gleiche Anzahl von Elementen haben müssen. Eine bijektive Funktion (oder eine bijektive Abbildung) ist also nur möglich, wenn die beiden Mengen genau gleich mächtig sind.

Diesen Umstand kann man ausnutzen, um (insbesondere im Fall unendlich großer Mengen) die Gleichmächtigkeit zweier Mengen zu definieren: Zwei Mengen sind gleichmächtig, wenn es mindestens eine bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt.

2.6 n-äre Funktionen

Bis jetzt war es immer so, dass die Domäne einer Funktion eine gewöhnliche, einfache Menge war. Es spricht jedoch nichts dagegen, das kartesische Produkt von zwei oder sogar mehr Mengen als Domäne zu verwenden. In diesem Fall spricht man von n-ären Funktionen, wobei n die Anzahl der Mengen des kartesischen Produkts ist.

2.6.1 Beispiele

Produkt

$$prod\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, x_2) \longmapsto x_1 \cdot x_2$$

Das bedeutet, wenn man $y = prod(x_1, x_2)$ berechnet, erhält man die reelle Zahl y, die das Produkt der reellen Zahlen x_1 und x_2 ist. Man berechnet also $y = x_1 \cdot x_2$ innerhalb der Menge der reellen Zahlen. Das kartesische Produkt, das die Domäne ist, besteht aus 2 Mengen, also ist diese Funktion eine binäre (2-wertige) Funktion.

Man beachte, dass hier die Domäne das kartesische Produkt der Menge der reellen Zahlen mit sich selbst ist. Dies kann auch geschrieben werden als

$$prod\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, x_2) \longmapsto x_1 \cdot x_2$$

Größter gemeinsamer Teiler (Greatest common divisor)

$$gcd\colon\ \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$

Es gibt einen recht effizienten Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen (Euklidischer Algorithmus), aber er kann nicht als geschlossene Formel geschrieben werden. Dies ist ein weiteres Beispiel für eine binäre Funktion.

Telefonbucheintrag (phone list entry)

$$phone\colon\ \text{Person} \times \{\text{geschäftl.}, \text{privat}\} \times \{\text{mobil}, \text{Festnetz}\} \to \text{Telnr.}$$

Auch hier gibt es keine geschlossene Formel. Dieses Beispiel zeigt, dass auch das kartesische Produkt von drei verschiedenen Mengen die Domäne einer Funktion sein kann. Dies ist eine ternäre (3-wertige) Funktion.

3 Algebren

Wir bleiben weiterhin in einem Teilgebiet der Mengenlehre. Wie die Relationen und Funktionen haben aber auch Algebren (Einzahl: Algebra) ganz besondere Eigenschaften.

Eine Algebra (oder "universelle Algebra") ist eine Menge A wie oben beschrieben (die Grundmenge) zusammen mit einer Sammlung (d. h. einer anderen Menge) von Operationen auf Elementen von A.

Eine n-äre Operation auf A ist eine Funktion, die n Elemente von A miteinander verknüpft und ein Element von A zurückgibt.

Wir nennen die Menge aller Funktionen, die Operationen auf Elementen von A sind, die Menge F. Eine Algebra ist nun nichts weiter als eine Menge mit genau 2 Elementen, nämlich der Grundmenge A und die Operatorenmenge F:

$$Algebra\ =\ \{A, F\}$$

- A ist eine beliebige Menge (keine Einschränkungen)
- F ist eine Menge von Operationen. Jede Operation in F ist eine Funktion, deren Domäne entweder $\emptyset$ (die leere Menge) oder A oder $A \times A = A^2$ oder $A \times A \times A = A^3$ oder ... oder $A \times A \times \cdots \times A = A^n$ ist, wobei $n \in \mathbb{N}$. Die Anzahl der A's (die Anzahl n der Argumente oder Parameter der Funktion) kann 0 (nullwertige Funktion, deren Domäne die leere Menge ist), 1 (unär), 2 (binär), 3 (ternär) oder jede andere natürliche Zahl (n-är) sein. In der allgemeinen Theorie der Universalalgebren kann n sogar unendlich sein; für die meisten Zwecke ist jedoch ein endliches n ausreichend.

3.1 Beispiele für Algebren

- $\{\mathbb{N}, \{+\}\}$

  Diese Algebra kombiniert die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit einer Funktion, deren Name $+$ ist. Die Funktion $+$ ist eine Operation auf natürlichen Zahlen und eine binäre Funktion. $+$ ist eine Teilmenge eines kartesischen Produkts, das eine Domäne (die Eingabemenge der Funktion) mit einer Codomäne (die Ausgabemenge der Funktion) so kombiniert, dass jedes Element der Domäne auf genau ein Element der Codomäne abgebildet wird.

  Die Domäne ist wiederum ein kartesisches Produkt von $\mathbb{N}$ mit sich selbst (die Eingabemenge der Funktion ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}^2$, was sie als binäre Funktion definiert) und die Codomäne ist $\mathbb{N}$. Wir können also die Signatur dieser Operation aufschreiben, wie wir es zuvor mit anderen binären Funktionen getan haben:

  $$add\colon\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad (x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2$$

  Aber das Symbol für die Addition ist nicht add sondern $+$. Daher sieht die korrekte Signatur so aus:

  $$+\colon\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad (x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2$$

- $\{\mathbb{N}, \{+, -\}\}$

  Dasselbe wie vorher, aber jetzt haben wir zwei Operationen: Addition und Subtraktion.

- $\{\{\mathrm{wahr}, \mathrm{falsch}\}, \{\mathrm{und}, \mathrm{oder}, \mathrm{nicht}\}\}$

  Die Grundmenge dieser Algebra hat nur zwei Elemente (wahr und falsch), aber drei Operationen. Eine dieser Operationen ist unär (nicht), die anderen (und und oder) sind binär. Diese Algebra ist die Grundlage der Aussagenlogik.

- In Datenbanksystemen ist jede Tabelle eine Relation (eine Teilmenge des kartesischen Produkts aller Spalten der Tabelle, wobei jede Spalte eine Menge möglicher Werte ist). (Daher kommt auch das Wort »relational« in »relationales Datenbanksystem«). Und das Datenbanksystem ist die Menge aller existierenden und nicht existierenden Tabellen, und diese Menge von Tabellen ist die Grundmenge einer Algebra, und die Menge der Operationen enthält Funktionen wie »Vereinigung«, »Schnittmenge«, »Projektion«, »Selektion« usw. Jedes Datenbanksystem ist also auch eine Algebra.
- Jede Klassendefinition in einer objektorientierten Programmiersprache ist ebenfalls eine Algebra. Die Grundmenge ist das kartesische Produkt der Typen aller Attribute und die Operationen werden durch die Methoden definiert.

4 Mengenlehre als Basis anderer mathematischer Disziplinen

4.1 Mengenlehre als Basis der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Grundidee der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruht darauf, dass es Vorgänge (»Experimente«) gibt, die man zwar beliebig oft unter gleichen Voraussetzungen wiederholen kann, die aber zu unterschiedlichen Ergebnissen führen können. Ein Beispiel dafür ist der Wurf eines gewöhnlichen sechsseitigen Spielwürfels. Bei einem solchen Würfel kann es nur sechs verschiedene Resultate geben, nämlich ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄ und ⚅. Es liegt nahe, diese möglichen Resultate zu einer Menge zusammenzufassen.

4.1.1 Ereignisse

Ereignismenge

Die Menge aller möglichen voneinander unterscheidbaren Ergebnisse eines Zufallsexperiments ist die Ereignismenge dieses Experiments. Das Formelsymbol, das am häufigsten dafür verwendet ist, ist der große griechische Buchstabe Omega:

$$\Omega = \{\text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}, \text{⚃}, \text{⚄}, \text{⚅}\}$$

Beachte, dass die Elemente dieser Menge nicht einzelne Ergebnisse von bestimmten Experimenten sind, sondern Zusammenfassungen aller möglichen Experimente, die dasselbe Ergebnis zur Folge haben. Der eine spezielle Wurf eines Würfels, durchgeführt von Michael Gruber, am 19. August 1895 um 22:48 Uhr in Altenmarkt bei Fürstenfeld bei dem er die Augenzahl ⚃ gewürfelt hat, ist also kein Element der Ereignismenge. Aber die Gesamtheit aller vergangenen, gegenwärtigen und zukünftigen Würfe, bei denen der Würfel mit der Seite ⚃ nach oben zu liegen kommt; diese Gesamtheit ist ein Element der Ereignismenge.

Elementarereignis

Ein Elementarereignis ist eine Teilmenge der Ereignismenge mit der Mächtigkeit 1. Beispielsweise sind die soeben beschrieben Würfe der Augenzahl ⚃ ein solches Elementarereignis, und das ist natürlich eine Menge:

$$E_4 = \{\text{⚃}\}$$
$$E_4 \subseteq \Omega$$

Allgemeines Ereignis

Jede Teilmenge der Ereignismenge ist ein Ereignis. Beispielsweise ist das Würfeln einer geraden Augenzahl ein Ereignis.

$$G = \{\text{⚁}, \text{⚃}, \text{⚅}\}$$
$$G \subseteq \Omega$$

Sicheres Ereignis

Die mächtigste Teilmenge jeder Menge ist diese Menge selbst. Daher ist die ganze Ergebnismenge selbst ebenfalls ein Ereignis.

$$\Omega \subseteq \Omega$$

Das Besondere an diesem Ereignis ist, dass es ausnahmslos immer bei jedem Zufallsexperiment, das der Ereignismenge Ω zugrunde liegt, eintritt. Dieses Ereignis tritt daher sicher immer ein und heißt daher »sicheres Ereignis«.

Unmögliches Ereignis

Eine andere Teilmenge, die es bei jeder Menge gibt, ist die leere Menge.

$$\emptyset \subseteq \Omega$$

Die leere Menge ist jenes Ereignis, das niemals eintreten kann, denn in der leeren Menge ist kein einziges Elementarereignis enthalten. Die leere Menge hat daher in der Wahrscheinlichkeitsrechnung einen speziellen Namen, man nennt sie in diesem Kontext »das unmögliche Ergebnis«.

Gegenereignis

Das Gegenereignis eines Ereignisses ist die Komplementärmenge des Ereignisses. Die Grundmenge ist dabei die Ereignismenge.

Bleiben wir beim Würfeln. Die Grundmenge ist

$$\Omega = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$$

und als Ereignis betrachten wir wieder das Werfen einer geraden Augenzahl

$$G = \{⚁, ⚃, ⚅\}$$

In diesem Fall wäre das Werfen einer ungeraden Augenzahl das Gegenereignis

$$U = \{⚀, ⚂, ⚄\}$$

Diese beiden Mengen sind disjunkt

$$G \cap U = \emptyset$$

und ihre Vereinigungsmenge ist die Grundmenge

$$G \cup U = \Omega$$

Daher ist die eine Menge das Komplement der anderen

$$G^{\mathrm{C}} = U; \quad U^{\mathrm{C}} = G$$

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet man aber nicht den Begriff »Komplementärmenge«, sondern »Gegenereignis«.

4.1.2 Vereinbarkeit

Auch für den Begriff »disjunkt« gibt es in der Wahrscheinlichkeitsrechnung einen eigenen Begriff. Man nennt zwei Ereignisse, die disjunkt sind, »unvereinbar«. Das bedeutet, dass es kein Zufallsexperiment geben kann, bei dem beide Ereignisse zugleich auftreten.

Wenn hingegen zwei Ereignisse zugleich bei ein und demselben Zufallsexperiment auftreten können, nennt man diese Ereignisse »vereinbar«. Im Kontext der Mengenlehre würde man sagen, dass die Mengen nicht disjunkt sind.

- A und B sind unvereinbar = A und B sind disjunkt = $A \cap B = \emptyset$
- A und B sind vereinbar = A und B sind nicht disjunkt = $A \cap B \neq \emptyset$

4.2 Mengenlehre als Basis der Zahlentheorie

4.2.1 Natürliche Zahlen als Mengen

Wenn man mit Zahlen arbeitet, muss man ganz zu Beginn erstmal festlegen, was eine Zahl überhaupt ist, und welche Zahlen es geben soll. In weiterer Folge muss man Verknüpfungen von Zahlen definieren, womit man bereits das Reich der Algebra betritt, und kann dann bereits vorhandene Zahlenmengen erweitern, indem man neue Zahlen-Arten erfindet, um bestimmte Verknüpfungen abzuschließen.

Aber ganz am Beginn der Zahlentheorie steht die Definition der Zahlen, und zwar die Definition der natürlichen Zahlen, weil das die elementarste Zahlenmenge überhaupt ist. Und diese Zahlen lassen sich mit Hilfe der Mengenlehre praktisch aus dem Nichts erschaffen, indem man buchstäblich mit nichts (genauer: mit der leeren Menge) anfängt.

Als weitere Zutat muss man nur noch bestimmten Mengen neue Namen geben.

0

Als erstes gibt man der leeren Menge einen neuen Namen, und dieser Name ist »0«:

$$0 := \{\,\}$$

1

Jetzt haben wir schon mehr als nichts, nämlich »0«, und das kann man ja in eine Menge packen, und diese neue Menge bekommt einen neuen Namen:

$$1 := \{0\} = \big\{\{\,\}\big\}$$

2

Nachdem wir jetzt schon zwei Dinge erschaffen haben, nämlich »0« und »1«, legen wir beide in eine neue Menge, und geben der neuen Menge einen neuen Namen:

$$2 := \{0, 1\} = \Big\{\{\,\}, \big\{\{\,\}\big\}\Big\}$$

Weitere natürliche Zahlen

Weil das so gut geklappt hat, kann man das immer und immer wieder fortsetzen:

$$3 := \{0, 1, 2\} = \Big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}, \big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}\big\}\Big\}$$

$$4 := \{0, 1, 2, 3\} = \Big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}, \big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}\big\}, \big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}, \{\{\,\}, \{\{\,\}\}\}\big\}\Big\}$$

$$5 := \{0, 1, 2, 3, 4\} = \Big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}, \big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}\big\}, \big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}, \{\{\,\}, \{\{\,\}\}\}\big\}, \big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}, \{\{\,\}, \{\{\,\}\}\}, \{\{\,\}, \{\{\,\}\}, \{\{\,\}, \{\{\,\}\}\}\}\big\}\Big\}$$

usw.

Auf diese Weise kann man alle natürlichen Zahlen definieren.

4.2.2 Einfache Verknüpfungen

Wenn man natürliche Zahlen auf diese Weise definiert, ist jede Zahl eine Menge, die all ihre Vorgänger als Elemente enthält, und damit kann man bereits sehr einfache Verknüpfungen allein mit Hilfe von Mengenoperationen definieren:

Minumum

Das Minimum zweier Zahlen ist die Schnittmenge der beiden Zahlen:

$$\min(A, B) = A \cap B$$

Beispiel:

$$\min(2, 3) \;=\; 2 \cap 3 \;=\; \big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}\big\} \;\cap\; \big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}, \{\{\,\}, \{\{\,\}\}\}\big\} \;=\; \big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}\big\} \;=\; 2$$

Maximum

Das Maximum zweier Zahlen ist die Vereinigungsmenge der beiden Zahlen:

$$\max(A, B) = A \cup B$$

Beispiel:

$$\max(2, 3) \;=\; 2 \cup 3 \;=\; \big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}\big\} \;\cup\; \big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}, \{\{\,\}, \{\{\,\}\}\}\big\} \;=\; \big\{\{\,\}, \{\{\,\}\}, \{\{\,\}, \{\{\,\}\}\}\big\} \;=\; 3$$

4.2.3 Eine alternative Definition: Natürliche Zahlen als Mächtigkeiten von Mengen

Eine andere Art, natürliche Zahlen zu definiert, beruht ganz einfach darauf, dass den Mächtigkeiten gleich mächtiger Mengen bestimmte Namen gibt.

0

Die Zahl 0 definiert man als die Mächtigkeit der leeren Menge

$$0 := |\{\,\}|$$

1

Die Zahl 1 definiert man als die Mächtigkeit einer Singleton-Menge, also als die Mächtigkeit einer beliebigen Menge, die genau 1 Element enthält

$$1 := |\{x\}| \;=\; |\{\text{😎}\}| \;=\; |\{\text{🔷}\}| \;=\; \big|\{\{\,\}\}\big| \;=\; \cdots$$

weitere natürliche Zahlen

Das geht natürlich mit allen Mengen, die eine endliche Größe haben:

$$2 := |\{\text{👩},\text{👨}\}| \;=\; |\{\text{🍎},\text{🍐}\}| \;=\; \big|\{\text{⬆},\text{⬇}\}\big| \;=\; \cdots$$
$$3 := |\{\text{🙈},\text{🙉},\text{🙊}\}| \;=\; |\{\alpha,\beta,\gamma\}| \;=\; \cdots$$
$$\cdots$$

Addition

Auf diese Weise kann man sogar die Addition natürlicher Zahlen definieren. Die Mächtigkeit der Vereinigungsmenge zweier disjunkter Mengen ist nämlich genau die Summe der Mächtigkeiten der beiden vereinten Mengen:

$$A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad |A \cup B| = |A| + |B|$$

Subtraktion

Die Mächtigkeit einer Komplementärmenge A ist genau die Differenz zwischen der Mächtigkeit der Grundmenge G und der Mächtigkeit der Menge A und damit kann man die Rechenoperation »Subtraktion« definieren:

$$A \subseteq G \quad \Longrightarrow \quad |G \setminus A| = |G| - |A|$$

Multiplikation

Das kartesische Produkt zweier Mengen eignet sich zur Definition der Multiplikation zweier natürlicher Zahlen:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Primzahlen

Sogar Primzahlen, die ja in der Zahlentheorie eine sehr fundamentale Rolle spielen, kann man mit Hilfe der Mengenlehre definieren.

Dazu nimmt man je eine Menge der Mächtigkeit 2, 3, 4, usw., bildet von allen Paaren, die man daraus bilden kann, das Kreuzprodukt, fasst die Mächtigkeiten dieser Kreuzprodukte zu einer Menge zusammen, nimmt zu dieser Menge noch die Zahlen 0 und 1 hinzu, und bildet dann davon die Komplementärmenge zur Menge der natürlichen Zahlen, und schon hat man die Menge aller Primzahlen nur mit Mitteln der Mengenlehre erzeugt.

4.3 Mengenlehre als Basis der Aussagenlogik

Man nimmt folgende Definitionen vor:

- falsch := $\{\,\}$
- wahr := $\{\{\,\}\}$
- und := Schnittmenge

$$a \wedge b \quad \Leftrightarrow \quad a \cap b$$

- oder := Vereinigungsmenge

$$a \vee b \quad \Leftrightarrow \quad a \cup b$$

- Negation := Komplement zu wahr

$$\neg a \quad \Leftrightarrow \quad \{\{\,\}\} \setminus a$$

Nachdem man jede logische Verknüpfung auf die drei gezeigten Operationen zurückführen kann, kann man jede aussagenlogische Formel auf Operationen mit Mengen zurückführen.

Dieser Ansatz erlaubt es auch, Aussagenlogik auch auf mehr als nur 2 Wahrheitswerte auszudehnen. In 4.2.1 wurden die Zahlen 0 und 1 exakt gleich definiert wie hier die Wahrheitswerte *falsch* und *wahr*. Wenn man eine Umbenennung vornimmt ($\text{falsch} = 0$; $\text{wahr} = 1$) wird aus einer logischen Und-Verknüpfung die Operation »Minimum« und aus »Oder« wird »Maximum«, und auf diese Weise lässt sich die Aussagenlogik auf beliebig viele Wahrheitswerte ausdehnen. Lediglich die Negation muss neu definiert werden.

4.4 Mengenlehre als Basis der Algebra

Algebren (definiert als Mengen und Verknüpfungen auf diesen Mengen) wurden bereits im Abschnitt 3 ab Seite 44 vorgestellt. Die Algebra als mathematische Disziplin beschäftigt sich genau mit solchen Algebren, zum Beispiel mit Gruppen, Ringen, Körpern usw.

4.4.1 Gruppen

Eine Gruppe ist eine Menge auf der eine binäre Verknüpfung definiert ist, die jedem beliebigen Paar, das man aus Elementen der Menge bilden kann, ein Element derselben Menge zuordnet. Dabei muss diese Verknüpfung auf dieser Menge das Assoziativgesetz erfüllen, es muss ein neutrales Element geben, und zu jedem Element muss es ein inverses Element geben. Wenn eine Gruppe zusätzlich noch das Kommutativgesetz erfüllt, nennt man das eine kommutative Gruppe oder eine Abelsche Gruppe.

Ein Beispiel für eine Gruppen ist die Menge der ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung. Dabei ist die Zahl 0 das neutrale Element und das inverse Element jeder Zahl ist die entsprechende negative Zahl. Diese Gruppe ist kommutativ.

Ein Beispiel für eine nicht-kommutative Gruppe ist die Menge der reellen Zahlen mit der Subtraktion als Verknüpfung.

4.5 Mengenlehre als Basis der Analysis

Die Analysis beschäftigt sich vor allem mit Funktionen, insbesondere mit den Ableitungen von Funktionen, mit Integralen, Differentialgleichungen usw. Funktionen sind aber Teilmengen von Relationen, Relationen sind Teilmengen von kartesischen Produkten, daher kann man auch Funktionen als Operationen auf Mengen auffassen.

4.6 Mengenlehre als Basis der formalen Sprachen

Formale Sprachen sind ein Teilgebiet der theoretischen Informatik. Formale Sprachen schlagen eine Brücke zwischen Mathematik und Linguistik (Sprachwissenschaft) und sie erlauben es, Antworten auf grundlegende philosophische Fragen zu geben. (*Was ist ein Problem? Warum kann man von vielen Problemen, die erwiesenermaßen eine Lösung haben, diese Lösung nicht finden?*). Formale Sprachen umfassen alles, was man mit Zeichen codieren kann, also sämtliche natürliche Sprachen (Deutsch, Chinesisch, Navajo, Suaheli, usw.), sämtliche Programmiersprachen (C, Pascal, Fortran, Cobol, Python, Java, ...), sämtliche Auszeichnungssprachen (html, xml, svg, JSON, ...) aber auch alle möglichen Arten Texte, Musikdateien, Videos, Tabellen usw. auf einem Computer zu speichern oder über Datenleitungen zu übertragen.

In formalen Sprachen werden Sprachen mit Hilfe von Grammatiken und Alphabeten definiert, und es wird untersucht, ob bestimmte Wörter zu bestimmten Sprachen gehören. Dabei sind alle genannten Begriffe Mengen. Ein Alphabet ist eine Menge, eine Grammatik ist eine Menge, ebenso ist eine Sprache eine Menge.

4.7 Mengenlehre als Basis der Komplexitätstheorie

In der Komplexitätstheorie geht es darum zu bewerten, auf welche Weise sich die Verarbeitungszeit oder der Speicherbedarf beim Lösen eines Problems ändert, wenn man die Größe der Input-Daten verändert. Dabei fasst man Probleme mit ähnlichen Anhängigkeiten von der Inputgröße zu Mengen zusammen. Es entsteht eine große und sehr verschachtelte Hierarchie von Teil- und Obermengen, manchmal auch von Schnittmengen, und die großen Fragen der Komplexitätstheorie drehen sich hauptsächlich darum, welche dieser Mengen gleich oder verschieden sind.

Ein berühmtes offenes Problem der Komplexitätstheorie ist die Frage, ob zwei bestimmte Mengen gleich oder verschieden sind. Gemeint sind diese beiden Mengen:

- Die Menge aller Probleme, die auf einem echten Computer (genauer: auf einer deterministischen Turingmaschine) in praktikabler Zeit lösbar sind
- Die Menge aller Probleme, die auf einer nichtdeterministischen Turingmaschine (das ist ein Computer den man nicht bauen kann weil er hellsehen können müsste) in praktikabler Zeit lösbar sind

Wer diese Frage beantworten kann, bekommt 1 Million US-$, was aber egal ist, weil man dann auch Krebs heilen kann und weil man dann jede gängige Verschlüsselung im Internet knacken kann.

4.8 Mengenlehre als Basis der Kryptographie

In der Kryptographie werden Blöcke aus mehreren Zeichen eines bestimmten Datenstroms als einzelne Elemente großer Mengen betrachtet, und diese Elemente werden durch bijektive Abbildungen auf andere Elemente entweder derselben Menge oder einer anderen Menge abgebildet. In der Kryptographie geht es darum, diese bijektiven Abbildungen nach Möglichkeit so zu gestalten, dass die Abbildung in eine Richtung leicht durchführbar ist, während die Umkehrung der Abbildung nur dann ich praktikabler Zeit möglich sein soll, wenn man ein bestimmtes Geheimnis kennt.

5 Anhang A – Grundbegriffe

5.1 Kommutativgesetz

Eine Verknüpfung ist genau dann kommutativ, wenn die Reihenfolge, in der man zwei Elemente miteinander verknüpft, in keinem Fall etwas am Ergebnis ändert.

Wenn also $\circ$ eine Verknüpfung ist, und wenn $a \circ b$ und $b \circ a$ immer genau dasselbe ergeben, egal, welche Werte man für a und b einsetzt, dann ist die Verknüpfung $\circ$ kommutativ. Wenn man auch nur eine einzige Belegung für a und b finden kann, bei der $a \circ b \neq b \circ a$ gilt, ist damit bewiesen, dass die Verknüpfung $\circ$ nicht kommutativ ist.

Beispiele für kommutative Verknüpfungen sind:

- Die Addition natürlicher Zahlen:

  $$a + b = b + a$$

  Egal, welche natürliche Zahlen man hier für a und b einsetzt, $a + b$ wird immer dasselbe ergeben wie $b + a$.

- Die Mittelwertbildung rationaler Zahlen: $a \oslash b := \frac{a+b}{2}$

  $$a \oslash b = b \oslash \mathrm{a}$$

  Egal, welche rationale Zahlen man hier für a und b einsetzt, der Mittelwert von (a, b) wird immer dasselbe ergeben wie der Mittelwert von (b, a).

Ein Gegenbeispiel:

- Die Subtraktion ganzer Zahlen ist nicht kommutativ:

  $$5 - 2 \neq 2 - 5$$

  Wie oben bereits gesagt, genügt es, ein einziges Beispiel anzugeben, bei dem $a \circ b$ etwas anderes als $b \circ a$ ergibt. Dass es Fälle gibt, bei denen trotzdem $a - b = b - a$ gilt (im Fall der Subtraktion genau dann, wenn $a = b$) macht nichts, solange das nicht alle Fälle sind.

  Ergänzung:

  Die Subtraktion ist antikommutativ, weil $(a - b) = -(b - a)$, und auch das Kreuzprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren ist antikommutativ, weil beim Vertauschen der beiden Vektoren der Ergebnis-Vektor bei gleichbleibender Länge in die entgegengesetzte Richtung zeigt $(\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a})$. Es gibt aber auch Verknüpfungen, die weder kommutativ noch antikommutativ sind, z.B. das Produkt zweier Matrizen:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

5.2 Assoziativgesetz

Das Assoziativgesetz sagt etwas über eine mehrfach hintereinander auszuführende Verknüpfung aus.

Eine Verknüpfung ist genau dann assoziativ, wenn die Reihenfolge, in der man aufeinanderfolgende Verknüpfungen ausführt, in keinem Fall etwas am Ergebnis ändert. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

- Die Addition natürlicher Zahlen ist assoziativ:

  $$(a + b) + c = a + (b + c)$$

  Wenn man die Summe dreier Zahlen bildet, ist egal, ob man von links oder von rechts zu rechnen beginnt. Das Ergebnis ist immer dasselbe.

- Die Mittelwertbildung rationaler Zahlen ist **nicht** assoziativ:

  $$(4 \oslash 8) \oslash 12 \neq 4 \oslash (8 \oslash 12)$$
  $$6 \oslash 12 \neq 4 \oslash 10$$
  $$9 \neq 7$$

- Die Subtraktion ganzer Zahlen ist ebenfalls **nicht** assoziativ:

  $$(8 - 4) - 2 \neq 8 - (4 - 2)$$
  $$4 - 2 \neq 8 - 2$$
  $$2 \neq 6$$

5.3 »große« Operatoren bei kommutativ-assoziativen Verknüpfungen

Wenn eine Verknüpfung $\circ$ sowohl kommutativ als auch assoziativ ist, dann hat die Verknüpfung einer beliebigen Anzahl von Elementen sogar dann einen eindeutig definierten Wert, wenn weder die Reihenfolge der verknüpften Elemente noch die Reihenfolge der Ausführung der Verknüpfungen festgelegt sind.

Es genügt bei solchen Verknüpfungen also, nur einmal den Verknüpfungsoperator sowie die Menge der zu verknüpfenden Elemente anzugeben. Diese Schreibweise wäre bei kommutativ-assoziativen Verknüpfungen also eigentlich ausreichend:

$$\circ\{a, b, c, d, \cdots\}$$

Verknüpfungen mit dieser Eigenschaft sind z.B. die Addition reeller Zahlen und die Multiplikation reeller Zahlen:

$$\begin{aligned} +\{2,3,4\} &:= (2+3)+4 = 2+(3+4) \\ &= (2+4)+3 = 2+(4+3) \\ &= (3+2)+4 = 3+(2+4) \\ &= (3+4)+2 = 3+(4+2) \\ &= (4+2)+3 = 4+(2+3) \\ &= (4+3)+2 = 4+(3+2) \\ &= 9 \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} \cdot\{2,3,4\} &:= (2\cdot 3)\cdot 4 = 2\cdot(3\cdot 4) \\ &= (2\cdot 4)\cdot 3 = 2\cdot(4\cdot 3) \\ &= (3\cdot 2)\cdot 4 = 3\cdot(2\cdot 4) \\ &= (3\cdot 4)\cdot 2 = 3\cdot(4\cdot 2) \\ &= (4\cdot 2)\cdot 3 = 4\cdot(2\cdot 3) \\ &= (4\cdot 3)\cdot 2 = 4\cdot(3\cdot 2) \\ &= 24 \end{aligned}$$

Die hier vorgestellte Schreibweise mit dem »normalen« Operator wird aber nur selten verwendet. Stattdessen werden eigene Operatoren verwendet, die manchmal »große Operatoren« genannt werden:

- Summenoperator für die Addition

$$\sum\{a,b,c,\cdots\} \quad := \quad +\{a,b,c,\cdots\}$$

- Produktoperator für die Multiplikation

$$\prod\{a,b,c,\cdots\} \quad := \quad \cdot\{a,b,c,\cdots\}$$

Solche Operatoren findet man oft dort, wo die zu verknüpfenden Elemente durch ein Bildungsgesetz erzeugt werden können. Im allgemeinen Fall werden dann die einzelnen Elemente mit Indizes durchnummeriert (hier am Beispiel des Summenoperators, das funktioniert aber bei allen großen Operatoren gleich):

$$\sum\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$$

Dafür gibt es diese vereinfachte Schreibweise:

$$\sum_i a_i$$

Anstelle der ganzen Menge schreibt man nur ein allgemeines Element hin, das irgendwie von einem Index abhängt, und diesen Index schreibt man unter den großen Operator.

Häufig möchte man auch angeben, welchen Wertebereich der Index durchlaufen soll. Dazu schreibt man unter dem großen Operator hinter dem Namen des Index ein Gleichheitszeichen und dann den kleinsten Indexwert, und über dem großen Operator schreibt man den größten Indexwert.

Ein Beispiel:

$$\sum_{i=2}^{4} 3i + 2^i$$

Das allgemeine Element ist der Ausdruck $3i + 2^i$. (Beachte, dass $3i$ eine Kurzschreibweise für $3 \cdot i$ ist) In diesen Ausdruck muss man für i der Reihe nach die Werte 2, 3 und 4 einsetzen (wegen der Kommutativität der Verknüpfung könnte man das übrigens in jeder beliebigen Reihenfolge machen) und erhält für dieses Beispiel dann:

$$\sum_{i=2}^{4} 3i + 2^i = (3 \cdot 2 + 2^2) + (3 \cdot 3 + 2^3) + (3 \cdot 4 + 2^4)$$

$$= (6 + 4) + (9 + 8) + (12 + 16)$$
$$= 10 + 17 + 28$$
$$= 55$$

5.4 **Distributivgesetz**

Das Distributivgesetz sagt etwas über das Zusammenspiel zweier verschiedener Verknüpfungen aus.

Wenn $\circ$ und $*$ zwei verschiedene Operatoren sind, und wenn für das Paar $(\circ, *)$ das Distributivgesetz gilt, dann gilt folgendes:

$$(a * b) \circ (a * c) = a * (b \circ c)$$

Die hier dargestellte Form heißt »linksdistributiv«. Wenn die Verknüpfungen nicht kommutativ sind, muss man davon nämlich auch die rechtsdistributive Form unterscheiden: $(a * c) \circ (b * c) = (a \circ b) * c$

- Herausheben, Ausklammern
  Wenn ein Ausdruck in der Form $(a * b) \circ (a * c)$ gegeben ist und man ihn mit Hilfe des Distributivgesetzes in die Form $a * (b \circ c)$ bringt, nennt man das »Herausheben« oder »Ausklammern«.
- Ausmultiplizieren
  Wenn ein Ausdruck in der Form $a * (b \circ c)$ gegeben ist und man ihn mit Hilfe des Distributivgesetzes in die Form $(a * b) \circ (a * c)$ bringt, nennt man das »Ausmultiplizieren«.

Das Paar $(+, \cdot)$ ist ein Operatoren-Paar, für das das Distributivgesetz gilt:

$$(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b + c)$$

Beispiel:

$$(2 \cdot 3) + (2 \cdot 5) = 2 \cdot (3 + 5)$$
$$6 + 10 = 2 \cdot 8$$
$$16 = 16$$

(Hinweis: Die Tatsache, dass es bei einem Beispiel klappt, ist kein Beweis dafür, dass es immer klappt, sondern nichts weiter als ein Beispiel. Einen solchen Beweis müsste man anders erbringen, darauf wird hier aber verzichtet.)

Achtung!
Paare sind immer geordnete Paare! Das Paar $(\circ, *)$ ist etwas anderes als das Paar $(*, \circ)$!
Was für $(\circ, *)$ gilt, muss daher nicht automatisch auch für $(*, \circ)$ gelten.
Soeben wurde gezeigt, dass das Paar $(+, \cdot)$ ein Beispiel für zwei Operatoren ist, für die das Distributivgesetz gilt. Beim Paar $(\cdot, +)$ ist das aber nicht der Fall, wie dieses Gegenbeispiel beweist:

$$(2+3)\cdot(2+5) \neq 2+(3\cdot 5)$$
$$5\cdot 7 \neq 2+15$$
$$35 \neq 17$$

(Hinweis: Wie schon mehrfach erwähnt, reicht ein einzelner Fall, bei dem eine Vermutung nicht zutrifft, um zu beweisen, dass die Vermutung falsch ist.)

5.5 Relation, Funktion, Abbildung

Relationen und Funktionen wurden bereits im Abschnitt 2 ausführlich behandelt

5.5.1 Abbildung vs. Funktion

Der Begriff »Abbildung« wird üblicherweise als Synonym für »Funktion« verwendet. Mitunter ist mit »Abbildung« aber auch eine Relation gemeint, und es gibt sogar Autoren, welche die drei Begriffe »Relation«, »Abbildung« und »Funktion« mit drei separaten Definitionen belegen.

In allen Varianten ist der Begriff »Relation« so definiert, wie in Kapitel 2.1 (Seite 36). Darüber herrscht also Einigkeit. Lediglich die Bedeutungen von »Abbildung« und »Funktion« variieren.

Variante 1

Beide Begriffe, »Abbildung« und »Funktion«, meinen genau dasselbe, also das, was im Kapitel 2.2 (ab Seite 37) beschrieben wurde. Dies ist die mit Abstand häufigste Variante und es ist jene Variante, die hier in diesem Dokument verwendet wird.

Variante 2

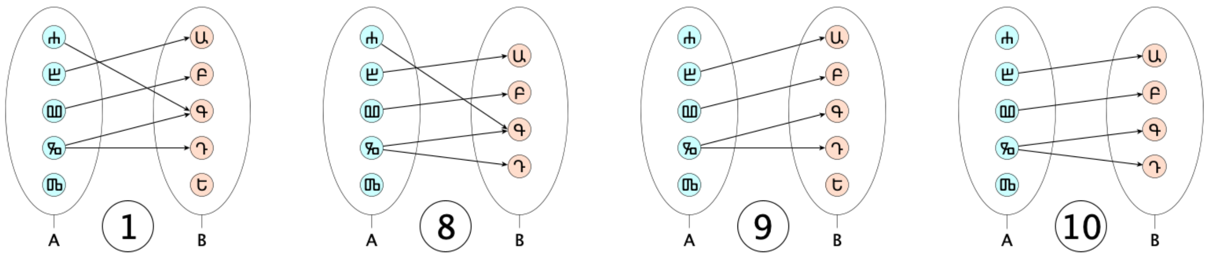
Die Begriffe »Relation« und »Funktion« entsprechen genau den oben definierten Begriffen. Der Ausdruck »Abbildung« wird aber als Synonym für »Relation« verwendet. Wenn dann auch noch von »bijektiven Abbildungen« (vergleiche mit bijektive Funktionen, Kapitel 2.5.3, Seite 43) gesprochen wird, kann das Unklarheit hervorrufen. Diese Variante sollte man daher vermeiden. (Man sollte aber wissen, dass manche Autoren ohne explizite Ankündigung diese Variante verwenden.)

Variante 3

Die in diesem Dokument für den Begriff »Funktion« verwendete Definition (siehe Kapitel 2.2, Seite 37) wird für den Begriff »Abbildung« verwendet. Der Begriff »Funktion« wird nur für bestimmte Abbildungen verwendet, nämlich nur für solche, bei denen sowohl Quellmenge als auch Zielmenge ausschließlich Zahlen enthalten. Anhänger dieser Variante bezeichnen eine Abbildung von Schuhen auf Regenschirme, die den Kriterien aus Kapitel 2.2 entspricht, nicht als Funktion, sondern als Abbildung. Anhänger dieser Variante verlangen, dass eine Funktion immer Zahlen auf Zahlen abbildet.

5.5.2 **Injektive, surjektive und bijektive Relationen**

Die Begriffe »injektiv«, »surjektiv« und »bijektiv« wurden im Kapitel 2.5 (ab Seite 42) nur für Funktionen definiert, also für eine Teilmenge der Relationen. Einige Autoren dehnen die Gültigkeit diese Begriffe aber auf alle Relationen aus. Das ist zwar nicht gängige Praxis, soll hier aber der Vollständigkeit halber trotzdem kurz thematisiert werden:



Keine der hier dargestellten Relationen ist eine Funktion. Zur Erinnerung: Eine Teilmenge des Kreuzprodukts zweier Mengen ist genau dann eine (totale) Funktion, wenn in der Darstellung mit den Pfeilen von jedem Element der Quellmenge genau 1 Pfeil ausgeht. Bei den hier dargestellten Relationen geht aber vom untersten Element kein Pfeil aus und von dem darüber zwei Pfeile. Beides darf in einer Funktion nicht sein.

Dehnt man die Begriffe »injektiv«, »surjektiv« und »bijektiv« auf alle Relationen aus, könnte man die Relationen 9 und 10 als injektiv bezeichnen (weil dort jedes Element der Zielmenge von maximal einem Pfeil getroffen wird). 8 und 10 könnte man als surjektiv bezeichnen (jedes Element wird von mindestens einem Pfeil getroffen) und nur die Relation 10 würde man als bijektiv bezeichnen (weil dort jedes Element der Zielmenge von genau einem Pfeil getroffen wird).

Es sei hier aber nochmals ausdrücklich erwähnt, dass dies nicht allgemein üblich ist. Wenn nichts anderes gesagt wird, werden in seriösen Publikationen die Begriffe »injektiv«, »surjektiv« und »bijektiv« nur auf (totale) Funktionen angewendet.

6 Anhang B – Beweise

6.1 Es gibt reelle Zahlen, die nicht rational sind; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen, also die Menge der Bruchzahlen. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{21}{7}, \frac{-5}{3}, \frac{-4}{5}, \dots\right\}$

Es soll bewiesen werden, dass die Quadratwurzel aus der Zahl 2 (also die positive Lösung der Gleichung $x^2 = 2$) nicht zu dieser Menge gehört. Wenn dies gelingt, wird dadurch gleichzeitig auch bewiesen, dass es reelle Zahlen gibt (darunter zumindest $\sqrt{2}$), die nicht rational sind.

Dazu muss man beweisen, dass die Zahl $\sqrt{2}$ nicht durch einen Bruch dargestellt werden kann.

Nehmen wir an, das wäre doch möglich. Dann könnte man schreiben

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}; \qquad a, b \in \mathbb{N}; \quad a, b \neq 0.$$

Wir verlangen also, dass Zähler und Nenner zwei positive natürliche Zahlen sind. Nun gibt es aber für jeden Wert einer rationalen Zahl unendlich viele Brüche, die diesen Wert darstellen.

Beispiel:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} \cdots$$

Das kommt daher, dass bis auf eine einzige Ausnahme, Zähler und Nenner einen größten gemeinsamen Teiler (ggT) haben, der größer als 1 ist:

$$\mathrm{ggT}(3,4) = 1\,; \quad \mathrm{ggT}(6,8) = 2\,; \quad \mathrm{ggT}(9,12) = 3\,; \quad \mathrm{ggT}(12,16) = 4\,; \quad \mathrm{ggT}(15,20) = 5$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} \cdots$$

Wenn es einen Bruch gibt, der den Wert $\sqrt{2}$ hat, muss es also zwingend auch einen Bruch geben, bei dem Zähler und Nenner teilerfremd sind. Diesen Bruch muss es immer geben, wenn es überhaupt einen Bruch für einen bestimmten Wert gibt. Wir können also diese zusätzliche Bedingung einführen:

$$\mathrm{ggT}(a, b) = 1$$

Wir beginnen mit

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Da $\sqrt{2}$, a und b positiv sind, kann man beide Seiten der Gleichung quadrieren.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Beide Seiten mit b^2 multiplizieren: (das ist erlaubt, weil $b \neq 0$ und somit auch $b^2 \neq 0$)

$$2b^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{b^2} \qquad \Rightarrow \qquad 2b^2 = a^2$$

Nun ist aber b eine ganze Zahl, daher ist auch b^2 ganz, und daher ist der Wert von $2b^2$ eine gerade Zahl. (Alternative gleichwertige Formulierungen: $2b^2$ ist durch 2 teilbar; $2b^2$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 2.)

Wenn nun aber links vom Gleichheitszeichen eine gerade Zahl steht, muss auch rechts davon eine gerade Zahl stehen. Also ist a^2 eine gerade Zahl. Weil a eine ganze Zahl ist, kann das Quadrat von a nur dann gerade sein, wenn auch a selbst gerade ist. Das heißt aber, dass a genau das Doppelte einer anderen ganzen Zahl sein muss, die wir mal n nennen (n ist genau die Hälfte von a):

$$a = 2n$$

Wegen $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ folgt daraus aber zwingend, dass b ungerade (also nicht durch 2 teilbar) sein muss (anderenfalls wäre 2 ein gemeinsamer Teiler von a und b und daher $\mathrm{ggT}(a, b) \neq 1$). Das wollen wir uns merken:

b ist nicht durch 2 teilbar.

Den soeben erhaltenen Ausdruck $a = 2n$ können wir in die Gleichung $2b^2 = a^2$ einsetzten, die wir anschließend ein wenig umformen:

$$2b^2 = a^2 \quad \xrightarrow{a=2n} \quad 2b^2 = (2n)^2$$
$$2b^2 = 2^2 \cdot n^2$$
$$2b^2 = 4n^2$$
$$b^2 = 2n^2$$

Man sieht: Hier ist der Wert der rechten Seite eine gerade Zahl, also muss auch der Wert der linken Seite, also b^2, eine gerade Zahl sein. Weil nun aber auch b eine ganze Zahl ist, muss daher auch b eine gerade Zahl sein. Wir halten auch das fest:

b ist durch 2 teilbar.

Zusammenfassend kann man nun sagen:

Wenn $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, dann gibt es eine natürliche Zahl b, deren Teilbarkeit durch 2 zugleich bewiesen als auch widerlegt werden kann. Das ist ein Widerspruch! Eine Zahl mit dieser Eigenschaft kann es nicht geben. Daher war die Annahme, dass es die Darstellung $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ mit ganzzahligen a und b gibt, falsch. Daher kann $\sqrt{2}$ auch kein Element von $\mathbb{Q}$ sein. Also

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

□

Damit ist $\sqrt{2}$ aber auch ein Beispiel für eine reelle Zahl (reell, weil man sie auf der Zahlengeraden eintragen kann), die nicht rational ist. Es gibt also reelle Zahlen, die nicht rational sind.

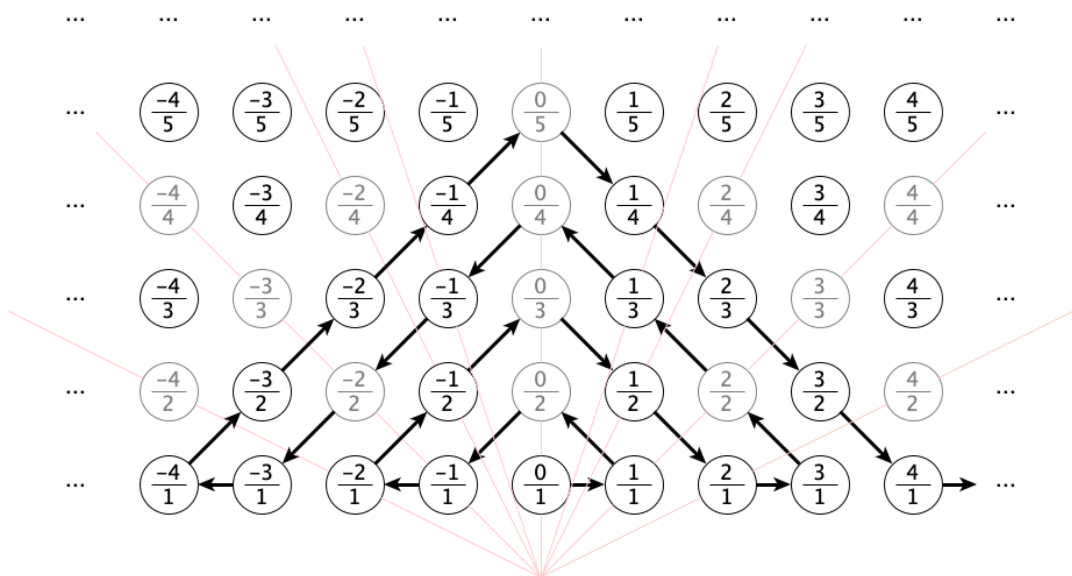
□

6.2 $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$

$\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen, also die Menge der Bruchzahlen. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{21}{7}, \frac{-5}{3}, \frac{-4}{5}, \dots\right\}$

Nun gibt es allein im Intervall zwischen 0 und 1 bereits unendlich viele rationale Zahlen. Noch schlimmer: Auch zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen, egal wie nahe beieinander sie auch sein mögen, gibt es ebenfalls unendlich viele rationalen Zahlen. Und auf dem Zahlenstrahl gibt es unendlich viele solcher Intervalle. Also gibt es in einem gewissen Sinn unendlich mal unendlich viele rationale Zahlen. Aber trotzdem kann man recht anschaulich beweisen, dass es eine bijektive Abbildung zwischen natürlichen und rationalen Zahlen gibt, was beweist, dass die beiden Mengen gleich mächtig sind. Dazu trägt man, wie im nächsten Bild dargestellt, alle rationalen Zahlen in einem zweidimensionalen Raster auf.



Alle Brüche in derselben Zeile haben denselben Nenner. Alle Brüche in derselben Spalte haben denselben Zähler. Die Nenner durchlaufen alle positiven ganzen Zahlen, die Zähler durchlaufen alle ganzen Zahlen. Jene Kombinationen von Zähler und Nenner, die sich kürzen lässt (hier grau dargestellt) könnte man weglassen, weil sie denselben Wert wie der gekürzte Bruch wiedergibt. (In diesem Bild liegen alle Brüche mit demselben Wert auf demselben roten Strahl. Nur der jeweils unterste ist schwarz, alle anderen sind grau.) Es ist aber einfacher, in einem ersten Schritt auch alle ungekürzten Brüche mitzunehmen, und sie erst in einem zweiten Schritt zu eliminieren.

Man beginnt mit dem Bruch $\frac{0}{1}$ und ordnet ihm die natürliche Zahl 0 zu. (Zufällig ist das auch der Wert dieses Bruches, diese Zuordnung hat aber nichts mit dem Wert zu tun.) Von dort folgt man dem dicken schwarzen Pfeil und kommt zu $\frac{1}{1}$ und ordnet diesem Bruch die nächste natürliche Zahl, also 1 zu. Es folgt das Paar $\left(2, \frac{0}{2}\right)$ dann $\left(3, \frac{-1}{1}\right)$, $\left(4, \frac{-2}{1}\right)$, $\left(5, \frac{-1}{2}\right)$, $\left(6, \frac{0}{3}\right)$, $\left(7, \frac{1}{2}\right)$

usw. Folgt man der Spur der schwarzen Pfeile, dann erreicht man irgendwann jeden Bruch und somit auch jede rationale Zahl, und kann auf diese Weise jedem Bruch eine eindeutige natürliche Zahl zuordnen, ohne dass ein Bruch oder eine natürliche Zahl ausgelassen wird. Man kann also eine Liste wie die links abgebildete herstellen:

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$
0	$\frac{0}{1}$
1	$\frac{1}{1}$
2	$\frac{0}{2}$
3	$\frac{-1}{1}$
4	$\frac{-2}{1}$
5	$\frac{-1}{2}$
6	$\frac{0}{3}$
7	$\frac{1}{2}$
8	$\frac{2}{1}$
9	$\frac{3}{1}$
10	$\frac{2}{2}$
$\vdots$	$\vdots$

Überspringt man nun alle Brüche, die einen Wert haben, der schon zuvor in die linke Liste eingetragen wurde (also alle kürzbaren Brüche, die hier grau dargestellt sind), dann erhält man die rechte Liste.

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$
0	$\frac{0}{1}$
1	$\frac{1}{1}$
2	$\frac{-1}{1}$
3	$\frac{-2}{1}$
4	$\frac{-1}{2}$
5	$\frac{1}{2}$
6	$\frac{2}{1}$
7	$\frac{3}{1}$
8	$\frac{1}{3}$
9	$\frac{-1}{3}$
10	$\frac{-3}{1}$
$\vdots$	$\vdots$

In der rechten Liste kommt jede rationale Zahl genau einmal vor, und jede natürliche Zahl kommt ebenfalls genau einmal vor. Es ist ausgeschlossen, dass ein Element aus einer der beiden Zahlenmengen mehrfach vorkommt (das passiert nur in der linken Liste, jedoch nicht in der rechten) und es ist ausgeschlossen, dass ein Element aus einer der beiden Zahlenmengen in der Liste fehlt. In der rechten Liste hat jede rationale Zahl eine eindeutige Laufnummer (nämlich die ihr zugewiesene natürliche Zahl), und jede natürliche Zahl verweist auf eindeutige Weise auf eine reelle Zahl.

Die in der rechten Liste dargestellte Abbildung der natürlichen Zahl auf die rationalen Zahlen ist daher bijektiv, und das bedeutet, dass $\mathbb{Q}$, die Menge aller rationalen Zahlen, und $\mathbb{N}$, die Menge aller natürlichen Zahlen, gleich mächtig sind: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$

□

Das hier verwendete Beweisverfahren geht auf Georg Cantor zurück und heißt »Cantors erstes Diagonalargument« (Cantor hat diesen Beweis 1874 veröffentlicht). Darin wird die »Cantorsche Paarungsfunktion« angewendet. Beide Verfahren wurden hier in leicht abgewandelter Form beschrieben. Die gleichnamigen Wikipedia-Artikel liefern weitere Erklärungen und enthalten Links zu weiterführender Literatur.

6.3 $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$; $|\mathbb{R}| > |\mathbb{Q}|$

$\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind die bereits in Beweis 6.2 vorgestellten Zahlenmengen.

$\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen, also die Menge aller Zahlen, die sich auf der Zahlengeraden darstellen lassen. $\mathbb{R} = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi, \ldots\right\}$

Jede rationale Zahl ist auch eine reelle Zahl, aber es gibt reelle Zahlen, die man nicht als Bruch darstellen kann (siehe Beweis 6.1). Aber das allein sagt noch nichts über die Mächtigkeit aus. Zwischen natürlichen Zahlen und rationalen Zahlen gibt es eine ähnliche Beziehung, und trotzdem sind beide Mengen gleich mächtig, wie in 6.2 bewiesen wurde.

»Cantors zweites Diagonalargument« (es gibt einen gleichnamigen Wikipedia-Artikel) ist ein Beweisverfahren, mit dem bewiesen werden kann, dass $\mathbb{R}$ mächtiger als $\mathbb{N}$ ist (und daher auch mächtiger als $\mathbb{Q}$). Dazu reicht es zu beweisen, dass bereits das Intervall von 0 bis 1 mächtiger als $\mathbb{N}$ ist. $\mathbb{R}$ enthält ja auch außerhalb dieses Intervalls weitere Zahlen. Wenn dieses kleine Intervall von 0 bis 1 bereits mächtiger als ganz $\mathbb{N}$ ist, dann muss ganz $\mathbb{R}$ (das unendlich viele gleichartiger Intervalle enthält) erst recht mächtiger als $\mathbb{N}$ sein.

Alle reellen Zahlen im Intervall von 0 bis 1 lassen sich als eine Dezimalzahl schreiben, bei der vor dem Komma die Ziffer 0 steht. Nach dem Komma folgen weitere Ziffern. Wenn die Folge dieser Ziffern irgendwann endet, handelt es sich um eine rationale Zahl, also um ein Element aus $\mathbb{Q}$. Interessant sind aber jene Zahlen, die man mit einer unendlich langen Folge von Ziffern schreiben muss, denn unter ihnen befinden sich alle nicht-rationalen Zahlen. (Man nennt sie auch »irrationale Zahlen«.) Daher hängt man an allen Zahlen, die mit endlich vielen Ziffern auskommen, eine unendlich lange Folge von Nullen an. Das ändert den Wert dieser Zahlen nicht, aber man kann auf diese Weise alle reellen Zahlen (somit auch alle rationalen Zahlen) mit gleich vielen Ziffern (nämlich mit unendlich vielen) schreiben.

Wenn $\mathbb{N}$ und das reelle Intervall von 0 bis 1 gleich mächtig sind, muss es einen Weg geben, alle reellen Zahlen in einer Liste aufzulisten, so wie in der rechten Liste aus Beweis 6.2. Dabei müssen die reellen Zahlen aber nicht in ihrer natürlichen Reihenfolge vorkommen. Das war bei den rationalen Zahlen ja auch nicht der Fall. So eine Liste könnte ungefähr so aussehen:

$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$
0	$0,\mathbf{6}63662026\cdots$
1	$0,6\mathbf{7}6130559\cdots$
2	$0,35\mathbf{2}855139\cdots$
3	$0,874\mathbf{1}41618\cdots$
4	$0,9509\mathbf{9}6320\cdots$
5	$0,07677\mathbf{0}759\cdots$
6	$0,837174\mathbf{5}51\cdots$
7	$0,7683931\mathbf{5}6\cdots$
8	$0,15009211\mathbf{7}\cdots$
$\vdots$	$\vdots$

Man achte nun auf die rot hervorgehobenen Ziffern, die entlang der Diagonale der Liste stehen. Daraus kann man eine neue Zahl bilden. Wir wollen dazu aber nicht genau dieselben Ziffern verwenden, die in dieser Diagonale stehen, sondern wir ersetzen die Ziffer 9 durch die Ziffer 0 und jede andere Ziffer durch die nächstgrößere Ziffer (also wird 3 durch 4 ersetzt, 7 durch 8 usw.)

In der Diagonale stehen diese Ziffern: $672190557\cdots$. (Die drei Fortsetzungspunkte sollen anzeigen, dass diese Ziffernfolge unendlich lang ist.)

Aus diesen Ziffern ergibt sich durch die Ersetzungsvorschrift die Zahl $0{,}783201668\cdots$, die wir hier d nennen wollen. Diese Zahl d hat eine interessante Eigenschaft:

Erinnern wir uns, dass wir davon ausgehen, dass wir jede reelle Zahl in einer Liste eintragen können. Das heißt, auch die Zahl d mit all ihren unendlich vielen Nachkommastellen muss irgendwo in dieser unendlich langen Liste stehen.

- Die Zahl d kann aber nicht die erste Zahl in der Liste sein, weil sich die erste Nachkommastelle von $0,\mathbf{7}83201668\cdots$ von der ersten Nachkommastelle der ersten Zahl in der Liste $(0,\mathbf{6}63662026\cdots)$ unterscheidet. (Dass in diesem Beispiel auch die meisten anderen Ziffern unterschiedlich sind, ist für den Beweis irrelevant. Es reicht ja, wenn nur eine Ziffer unterschiedlich ist.)
- Die Zahl d kann aber auch nicht die zweite Zahl in der Liste sein, weil die zweite Zahl in der Liste an der zweiten Stelle eine andere Ziffer hat. $(0{,}7\mathbf{8}32016\cdots \leftrightarrow 0{,}6\mathbf{7}61305\cdots)$
- Aus demselben Grund kann d auch nicht die dritte Zahl sein. $(0{,}78\mathbf{3}20\cdots \leftrightarrow 0{,}35\mathbf{2}85\cdots)$

Dasselbe Argument gilt für jede beliebige Zeile in der Liste: Die aus den Diagonalziffern konstruierte Zahl d kann nicht in Zeile n stehen, weil die n-te Ziffer von d nicht mit der n-ten Ziffer jener Zahl übereinstimmt, die in der Zeile n steht. Und das gilt für jedes beliebige n.

Dass das so ist, liegt nicht an der speziellen Reihenfolge, in der wir die reellen Zahlen in die Liste eingetragen haben. Denn wir haben überhaupt keine spezielle Reihenfolge festgelegt. Das gilt für jede beliebige Reihenfolge.

Das heißt: Ganz egal, in welcher Reihenfolge wir die Elemente von $\mathbb{R}$ den Elementen von $\mathbb{N}$ zuzuordnen versuchen, wir werden immer mindestens ein Element von $\mathbb{R}$ konstruieren können, das nicht in dieser Liste stehen kann. Eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}$ ist daher unter keinen Umständen möglich. Egal was man auch versucht, es bleiben immer Elemente von $\mathbb{R}$ übrig, die man nicht auf $\mathbb{N}$ abbilden kann.

Daher ist $\mathbb{R}$ mächtiger als $\mathbb{N}$ und wegen $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ auch mächtiger als $\mathbb{Q}$.

$$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$$

$$|\mathbb{R}| > |\mathbb{Q}|$$

□

6.4 Satz von Cantor: Jede Menge ist weniger mächtig als ihre Potenzmenge

Wenn A eine endliche Menge ist, m die Mächtigkeit von A (also $m := |A|$), $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A, und M die Mächtigkeit dieser Potenzmenge (also $M := |\mathcal{P}(A)|$) dann stehen die Mächtigkeiten der beiden Mengen in dieser Beziehung zueinander:

$$M = 2^m$$

Die Mächtigkeit jeder endlichen Menge ist eine natürliche Zahl. Die kleinste natürliche Zahl ist die Zahl 0, das ist die Mächtigkeit der leeren Menge

$$|\{\,\}| = 0$$

Die Potenzmenge der leeren Menge enthält $2^0 = 1$ Element, nämlich genau die leere Menge:

$$\mathcal{P}(\{\,\}) = \big\{\{\,\}\big\}$$
$$|\mathcal{P}(\{\,\})| = 1$$

Also ist die Beziehung $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ bereits für die leere Menge erfüllt. Da sich die Mächtigkeit der Potenzmenge mit jedem Element, das zur Grundmenge hinzukommt, verdoppelt, gilt diese Relation für alle endlichen Mengen. All das wurde bereits in 1.7.4 ausführlich besprochen.

Der Zusammenhang $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ gilt zumindest formal auch für unendliche Mengen, aber wenn bereits $|A|$ unendlich groß ist, dann ist »zwei hoch unendlich« auch unendlich groß, und es stellt sich dann die Frage, ob zwischen »unendlich« und »zwei hoch unendlich« ein Zusammenhang wie zwischen den Mächtigkeiten der Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ besteht (in diesem Fall würde für unendlich große Mengen $|A| = |\mathcal{P}(A)|$ gelten), oder ob sich »unendlich« und »zwei hoch unendlich« zueinander verhalten wie die Mächtigkeiten von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$, was auch im Fall der unendlichen Mengen $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ bedeuten würde.

Es sei schon vorweggenommen, dass auch für unendlichen große Mengen A gilt:

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|$$

Und das soll nun bewiesen werden.

Gehen wir wieder vom Gegenteil aus. Wir nehmen also für unendlich große Mengen an

$$|A| = |\mathcal{P}(A)|$$

Wenn das zutrifft, muss es zwischen A und $\mathcal{P}(A)$ eine bijektive Abbildung geben (siehe 6.2). (Die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv wurden in Kapitel 2.5 ab Seite 42 definiert.)

Wir wissen aber, dass es eine injektive Abbildung von A auf $\mathcal{P}(A)$ gibt, denn für jedes einzelne Element in A gibt es als Element von $\mathcal{P}(A)$ eine Menge, die genau dieses eine Element enthält.

$$a \in A \quad \Leftrightarrow \quad \{a\} \in \mathcal{P}(A)$$

Daher kann die Potenzmenge auf keinen Fall weniger Elemente enthalten als die Urmenge, sondern mindestens gleich viele, vielleicht sogar mehr.

$$|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$$

Um die angenommene Bijektivität der Abbildung von A auf $\mathcal{P}(A)$ nachzuweisen, muss man also nur noch nachweisen, dass die Abbildung $A \to \mathcal{P}(A)$ auch surjektiv ist. Das ist genau dann der Fall, wenn es eine Möglichkeit gibt, Elemente von A und von $\mathcal{P}(A)$ so zu Paaren zusammenzubringen, dass alle Elemente von $\mathcal{P}(A)$ aufgebraucht werden.

An einem Beispiel wird das anschaulicher:

Wir versuchen nachzuweisen, dass eine bestimmte Abbildung der natürlichen Zahlen auf die Potenzmenge der natürlichen Zahlen surjektiv ist. Wir wählen (ohne besonderen Grund) die in der folgenden Tabelle gezeigte Abbildung. Jede andere Abbildung würde sich ebenso gut eignen. Ebenso wenig hat die Wahl von $\mathbb{N}$ irgendeine besondere Bedeutung. Jede andere unendlich große Menge würde sich ebenso gut eignen.

In der ersten Spalte stehen Elemente von $\mathbb{N}$, und in der zweiten Spalte stehen Elemente der Potenzmenge von $\mathbb{N}$, also Teilmengen von $\mathbb{N}$.

$\in \mathbb{N}$	$\in \mathcal{P}(\mathbb{N})$	
0	$\{17, 3819, 506798\}$	drei bestimmte Zahlen
1	$\left\{x \,\middle\vert\, \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\right\}$	alle geraden Zahlen
2	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	fünf bestimmte Zahlen
3	$\mathbb{P}$	alle Primzahlen
4	$\emptyset$	die leere Menge
5	$\mathbb{N}$	alle natürlichen Zahlen
$\vdots$	$\vdots$	

Nun kann man in jeder Zeile untersuchen, ob das Element aus der linken Spalte ein Element der Menge ist, die in der rechten Spalte steht:

$\in$ oder $\notin$

$0 \notin \{17, 3819, 506798\}$

$1 \notin \left\{x \,\middle\vert\, \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\right\}$

$2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$3 \in \mathbb{P}$

$4 \notin \emptyset$

$5 \in \mathbb{N}$

$\vdots$

Für den Beweis sind jene Fälle interessant, wo das nicht der Fall ist (wo also das Symbol $\notin$ steht). Man fasst daher alle Elemente aus der linken Spalte, die kein Element der rechten Menge sind, zu einer neuen Menge zusammen, die D heißen soll. In unserem Beispiel enthält D also die Elemente 0, 1 und 4, jedoch nicht 2, 3 und 5.

$$D = \{0, 1, 4, \cdots\}$$

D ist aber selbst auch eine Teilmenge von $\mathbb{N}$. Weil wir davon ausgehen, dass die Abbildung $A \to \mathcal{P}(A)$ surjektiv ist, muss D also irgendwo in unserer Tabelle als Eintrag der rechten Spalte vorkommen. Dann steht in der linken Spalte dieser Zeile natürlich ein Element aus $\mathbb{N}$, das wir n nennen wollen.

Nun sind zwei Fälle denkbar, von denen genau einer eintreten muss:

1. Fall: $n \in D$

Wenn n und D in derselben Zeile stehen, und n in D vorkommt, heißt das, dass das Element n bei der Konstruktion von D gar nicht in D eingefügt wurde, somit n nicht in D enthalten ist:

$$n \in D \Longrightarrow n \notin D$$

Das ist ein Widerspruch, Fall 1 kann daher nicht eintreten!

2. Fall: $n \notin D$

Wenn n und D in derselben Zeile stehen, und n kein Element von D ist, heißt das, dass das Element n bei der Konstruktion von D in D eingefügt wurde, und daher in D enthalten ist:

$$n \notin D \Longrightarrow n \in D$$

Das ist ein Widerspruch, Fall 2 kann daher nicht eintreten!

Wir stellen fest: Es muss genau einer der beiden Fälle eintreten, es ist aber nicht möglich, dass einer der beiden Fälle eintritt.

Das ist ein Widerspruch! Die ursprüngliche Annahme, dass die gewählte Abbildung $A \to \mathcal{P}(A)$ surjektiv ist, muss daher falsch sein.

Das lag aber nicht an einer speziellen Eigenschaft des gewählten Beispiels, sondern ist davon unabhängig. Das lag auch nicht daran, dass als Beispiel $\mathbb{N}$, die Menge der natürlichen Zahlen gewählt wurde. Das passiert bei jeder beliebigen Menge und deren Potenzmenge.

Das heißt:

Es ist unter keinen Umständen möglich, eine surjektive Abbildung einer beliebigen Menge auf ihre eigene Potenzmenge zu finden.

Weil aber jede bijektive Abbildung auch surjektiv ist, heißt das auch, dass es auch keine bijektive Abbildung einer Menge auf ihre Potenzmenge geben kann. Das wiederum bedeutet: Der Fall $|A| = |\mathcal{P}(A)|$ ist ausgeschlossen.

Wegen der Existenz injektiver Abbildungen gilt aber, wie zuvor gezeigt, $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Da die Gleichheit der Mächtigkeiten ausgeschlossen ist, bleibt also nur mehr diese Relation über:

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|$$

Jede Menge ist weniger mächtig als ihre Potenzmenge.

□

7 Anhang C – Ergänzungen

7.1 Russellsche Antimonie

Die hier vorgestellte Russellsche Antimonie wurde erstmals 1902 von Bertrand Russell und Ernst Zermelo beschrieben und ist nur eines der vielen Paradoxa der naiven Mengenlehre. Andere Paradoxa der naiven Mengenlehre sind:

- Burali-Forti-Paradoxon (1897)
- Erste Cantorsche Antinomie (1897)
- Zweite Cantorsche Antinomie (1899) (siehe 7.2)

Mengen können alle möglichen Dinge als Elemente enthalten, darunter auch andere Mengen (Beispielsweise sind alle Elemente von Potenzmengen Mengen). Es ist aber auch denkbar, dass eine Menge sich selbst als Element enthält.

Es gibt also

- Mengen, die sich selbst enthalten
- Mengen, die sich nicht selbst enthalten

Diese beiden einander ausschließenden Beschreibungen kann man verwenden, um zwei neue Mengen zu definieren:

- Menge $A :=$ Die Menge aller Mengen, die sich selbst enthalten
- Menge $B :=$ Die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten

Aufgrund dieser Definitionen ist klar, dass jede denkbare Menge entweder ein Element von A oder ein Element von B ist. Es ist nicht möglich, dass eine Menge sowohl in A als auch in B enthalten ist, und es ist ebenso unmöglich, dass eine Menge weder in A noch in B enthalten ist.

Die Frage ist nun, zu welcher der beiden Mengen die Menge B gehört. (Wie wir gerade gesehen haben, muss B ein Element von genau einer der beiden Mengen sein.)

- Wenn B sich selbst als Element enthält, entspricht das der Definition von A, damit ist B also ein Element von A. Das bedeutet aber, dass B kein Element von B ist, was aber genau das Gegenteil der ursprünglichen Annahme ist.
$$B \in B \Longrightarrow B \in A \Longleftrightarrow B \notin B$$
- Nimmt man hingegen an, dass sich B nicht selbst enthält, entspricht das der Definition von B, damit ist B also ein Element von B, was auch in diesem Fall genau das Gegenteil der ursprünglichen Annahme ist.
$$B \notin B \Longrightarrow B \in B$$

So etwas darf nicht sein!

Die Menge B ist also auf eine gewisse Weise mit den Definitionen beider Mengen inkompatibel.

Dafür ist aber die Menge A mit beiden Definitionen kompatibel:

- Nimmt man an, dass A sich selbst als Element enthält, dann entspricht das genau der Definition von A, woraus folgt, dass A in A enthalten ist. Passt!
$$A \in A \Longrightarrow A \in A$$
- Geht man aber davon aus, dass A sich nicht selbst als Element enthält, dann entspricht das genau der Definition von B, woraus folgt, dass A in B enthalten ist, daher kann A also kein Element von A ist. Passt auch!
$$A \notin A \Longrightarrow A \in B \Longleftrightarrow A \notin A$$

Hier tritt also der Umstand auf, dass nicht klar ist, ob A ein Element von A oder von B ist. Beides wäre gleichermaßen möglich. Die Definition einer Menge verlangt aber ausdrücklich, dass von jedem potentiellen Element eindeutig festgestellt werden kann, ob es zur Menge gehört oder nicht. (Siehe Abschnitt 1.3.1, Definition des Begriffs »Menge«)

So etwas darf auch nicht sein!

In die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre wurden daher Axiome eingebaut, die verhindern, dass man Mengen wie die hier beschriebenen Mengen A und B erzeugen kann. Für Konstrukte wie A und B wird dort der Begriff »Klasse« eingeführt. Zusätzlich gibt es Vorschriften, die festlegen, was man mit Klassen und Mengen machen darf und was verboten ist. Diese Vorschriften, gemeinsam mit den Axiomen, sorgen dafür, dass die axiomatische Mengenlehre frei von inneren Widersprüchen bleibt.

Eine axiomatische Mengenlehre, die neben Mengen auch den Umgang mit Klassen regelt, ist die Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre (NBG). Dort, wo sie sich ausschließlich mit Mengen befasst, ist sie äquivalent zur ZF.

7.2 Die Allmenge ist paradox (zweite Cantorsche Antimonie)

Manchmal wäre es ganz günstig, wenn es eine Menge gäbe, die alles enthält, was man sich vorstellen kann (und zusätzlich auch noch alles, was man sich nicht vorstellen kann). Diese Menge hat sogar einen Namen. Sie heißt »Allmenge« und ist in der naiven Mengenlehre auch durch keinerlei Regel ausgeschlossen.

Die Allmenge könnte bei der Bildung von Schnittmengen die Rolle eines neutralen Elements übernehmen, oder bei der Bildung von Vereinigungsmengen die Rolle eines idempotenten Elements. Sie wäre auch eine universelle Obermenge aller Mengen.

Aber sie führt zu Paradoxien und ihre Verwendung führt in weiterer Folge dazu, dass man falsche Aussagen als wahr beweisen kann, was das gesamte Gebäude der Mathematik zum Einsturz bringen würde.

Wenn man Potenzmengen (siehe 1.7, *Potenzmengen*) verstanden hat, und verstanden hat, dass jede Potenzmenge mächtiger ist als die Menge aus der sie entstanden ist (siehe 6.4, *Satz von Cantor*), dann fällt es relativ leicht, das Paradoxe der Allmenge zu beschreiben:

Man kann von jeder Menge die Potenzmenge bilden, also auch von der Allmenge, die wir hier A nennen. Wie im Satz von Cantor bewiesen wurde, ist diese Potenzmenge mächtiger als die Allmenge:

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|$$

Nun enthält die Allmenge aber definitionsgemäß alles, also auch alle Elemente, die in ihrer Potenzmenge enthalten sind. Die Allmenge ist also eine Obermenge ihrer eigenen Potenzmenge:

$$A \supseteq \mathcal{P}(A)$$

Daher gilt für die Mächtigkeiten der beiden Mengen diese Relation (siehe 1.6.7):

$$|A| \geq |\mathcal{P}(A)|$$

Das ist aber das genau Gegenteil dessen, was im Satz von Cantor bewiesen wurde. Die Allmenge führt also zu einem Widerspruch und beweist, dass die naive Mengenlehre nur mit Vorsicht zu verwenden ist. Wenn sich man ernsthaft mit Mengenlehre beschäftigen will, muss man die naive Version des 19. Jahrhunderts unbedingt durch eine axiomatische Mengenlehre wie z.B. die ZF ersetzen.

Für den Geltungsbereich dieses Dokuments heißt das aber zumindest: Hände weg von der Allmenge! Die Allmenge darf in keiner Erklärung eine wichtige Rolle spielen, und wo immer sie erwähnt wird, muss hinzugefügt werden, dass sie gefährliche Paradoxien mit sich bringt, die man verwenden kann, um die Wahrheit von falschen Aussagen zu »beweisen«.

7.3 **Mächtigkeiten unendlicher Mengen**

Wie in 6.3 bewiesen wird, sind nicht alle unendlich großen Mengen gleich groß. Es gibt verschieden große Unendlichkeiten. Die Mächtigkeit einer unendlich großen Menge kann durch eine Kardinalzahl ausgedrückt werden. Kardinalzahlen sind Verallgemeinerungen von natürlichen Zahlen (insbesondere ist auch jede natürliche Zahl eine Kardinalzahl). Die kleinste unendliche Kardinalzahl (und somit die kleinste Kardinalzahl, die keine natürliche Zahl ist) heißt $\aleph_0$ (sprich: »Aleph null«; Aleph ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets). $\aleph_0$ ist die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen.

$$\aleph_0 := |\mathbb{N}|$$

$\aleph_1$ ist die kleinste unendliche Kardinalzahl, die größer als $\aleph_0$ ist. Entsprechend sind $\aleph_2$, $\aleph_3$ usw. definiert. Die Frage, ob $|\mathbb{R}| = \aleph_1$ oder $|\mathbb{R}| > \aleph_1$, ist nicht einfach zu beantworten. Überraschenderweise lässt sich die Antwort nicht durch einen Beweis finden. Sie hängt von einer Definition ab, nämlich davon, ob das anfangs bereits erwähnte Auswahlaxiom, das den

Unterschied zwischen ZF und ZFC macht, gilt oder nicht gilt. Das sind aber Fragestellungen, die bereits weit über das hinausgehen, was mit diesem Dokument abgedeckt werden soll. Wenn Sie an diesen Themen Interesse haben, fragen Sie bitte im Unterricht nach.

Hier soll aber noch erwähnt werden, dass es eine unendliche Hierarchie von verschiedenen Arten der Unendlichkeit gibt. Im Satz von Cantor (Kapitel 6.4, Seite 66) wurde bewiesen, dass die Potenzmenge einer Menge in jedem Fall eine Mächtigkeit hat, die größer ist als die Mächtigkeit der Urmenge. Wenn man nun mit der kleinsten unendlichen Menge, nämlich der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ beginnt, und davon die Potenzmenge $P_1 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bildet, und dann die Potenzmenge dieser Potenzmenge $P_2 = \mathcal{P}(P_1) = \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$, und davon wieder die Potenzmenge $P_3 = \mathcal{P}(P_2) = \mathcal{P}\Big(\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big)\Big)$ und so weiter, dann erhält man eine unendlich lange Folge von unendlich großen Mengen, wovon jede einen Grad der Unendlichkeit hat, der größer ist als die Unendlichkeiten aller Vorgänger in der Folge.